

Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

N° 2013-03

**Pronósticos de la Estructura Temporal de las Tasas de
Interés en México Utilizando un Modelo Afín**

Rocio Elizondo
Banco de México

Abril 2013

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

Pronósticos de la Estructura Temporal de las Tasas de Interés en México Utilizando un Modelo Afín*

Rocio Elizondo[†]
Banco de México

Resumen: La finalidad de este documento es mostrar que un modelo afín en el cual se incorpora la condición de no arbitraje permite mejorar los pronósticos de la estructura temporal de las tasas de interés en México. Los tres factores de la curva de rendimientos (nivel, pendiente y curvatura) utilizados en dicho modelo son estimados mediante el método de componentes principales. El modelo de pronóstico se especifica como una relación lineal entre cada una de las tasas de interés y dichos factores, para los vencimientos de 1 a 60 meses. Los pronósticos del modelo afín son comparados con cuatro modelos de referencia: una tasa *forward*, un AR(1), un VAR(1) y un modelo de caminata aleatoria. Principalmente, se encuentra que el modelo afín tiene un desempeño comparable con el de los modelos de referencia para horizontes de 12 y 18 meses, a excepción del modelo de caminata aleatoria. No obstante, mejora su desempeño de pronóstico, para los horizontes de 24 meses en adelante, sobre todo para vencimientos de 60 meses.

Palabras Clave: Modelo Afín, Pronósticos, Curva de Rendimientos, Componentes Principales, Condición de no Arbitraje.

Abstract: The purpose of this paper is to show that an affine model which incorporates the condition of no arbitrage enables improvements in forecasting the term structure of interest rates in Mexico. The three factors of the yield curve (level, slope and curvature) used in the model are estimated by the method of principal components. The forecasting model is specified as a linear relationship between each of the interest rates and these factors, for maturities of 1 to 60 months. Affine model predictions are compared with four benchmark models: a forward rate, an AR(1), a VAR(1), and a random walk model. The main finding is that the affine model has a performance comparable to benchmark models for horizons of 12 and 18 months, except for the random walk model. However, improving its forecasting performance for the 24-month horizon, and especially for 60-month maturities.

Keywords: Affine Model, Forecasts, Yield Curve, Principal Components, Condition of no Arbitrage.

JEL Classification: G12, E43, C12, C53.

*El autor agradece los valiosos comentarios y sugerencias de Santiago García Verdú, Jessica Roldán Peña, Daniel Sámano Peñaloza y dos dictaminadores anónimos. El contenido de este artículo así como las conclusiones que de éste se derivan son responsabilidad exclusiva del autor y no reflejan necesariamente la opinión del Banco de México.

[†] Dirección General de Investigación Económica. Email: melizondo@banxico.org.mx.

1. Introducción

De acuerdo a la literatura, el estudio de la dinámica de la estructura temporal de las tasas de interés tanto para los economistas, inversionistas, así como para los hacedores de política, es importante por diversas razones.² Una de las razones principales es que la estructura temporal de las tasas de interés contiene información sobre la trayectoria futura de la economía (pronóstico). Asimismo, la estructura temporal de las tasas de interés puede proporcionar información sobre las expectativas de los participantes en los mercados financieros. Dichas expectativas son de considerable importancia para los pronosticadores y los hacedores de política, debido a que lo que piensan los participantes en el mercado acerca de lo que puede suceder en el futuro afecta sus decisiones actuales, las cuales, a su vez, ayudan a determinar lo que realmente sucede en el futuro. Una segunda razón para analizar el comportamiento de la estructura temporal de las tasas de interés es el estudio de los mecanismos de transmisión de la política monetaria, de modo que, para un estado dado de la economía, un modelo de la estructura temporal puede ayudar a explicar cómo las tasas de corto plazo se ven reflejadas en los niveles de las tasas de interés de largo plazo. Esto es importante, porque las tasas de largo plazo desempeñan un papel fundamental en una serie de decisiones económicas, tales como las decisiones de las empresas sobre la inversión, y las decisiones de los hogares con respecto a la adquisición de bienes durables (o de ahorro). Otra razón para estudiar la estructura temporal de las tasas de interés es la política de deuda de los gobiernos, debido a que cuando nueva deuda es emitida, éstos necesitan decidir acerca de los vencimientos de los nuevos bonos. Finalmente, la estructura temporal es fundamental en la estimación de derivados y en la cobertura de alguna eventualidad. Por ejemplo, en el caso de evaluar estrategias óptimas, los bancos necesitan saber cómo los precios de los derivados dependen del estado actual de la economía.

Debido a que el análisis de la estructura temporal de las tasas de interés es importante para diversos sectores de la economía, como se mencionó, este artículo tiene como fin pronosticar, utilizando un modelo afín con factores exógenos, la estructura temporal de las tasas de interés para diferentes horizontes de tiempo.

² Ver Ang y Piazzesi (2003); Cox, Ingersoll y Ross (1985); Duffie y Kan (1996).

Cabe destacar que hasta el momento no conozco trabajos formales para México que pronostiquen la estructura temporal de las tasas de interés, por lo que resulta interesante desarrollar la presente investigación cuyo objetivo principal es explorar para el caso de la economía mexicana la capacidad predictiva del modelo aquí presentado. Además, en la literatura la mayoría de los modelos se han concentrado en pronosticar tanto horizontes de corto plazo (menores o iguales a un año), como la dinámica de la estructura temporal de las tasas de interés con vencimientos de corto plazo. Asimismo, los que pronostican la dinámica de la estructura temporal de las tasas de interés de mayores plazos casi siempre recurren a modelos autorregresivos o a VARs que no incorporan la condición de no arbitraje y, por lo tanto, sólo pronostican la dinámica de los rendimientos utilizados en la estimación. La bondad del modelo propuesto es que permite estimar y pronosticar la estructura temporal de las tasas de interés consistentes con la condición de no arbitraje para cualquier vencimiento.

Existe una extensa literatura teórica y empírica con respecto a la estimación de la estructura temporal de las tasas de interés. Desde antes de los años 80 ya se contaba con modelos que estimaban los precios de bonos en una forma analítica y cerrada (Vasicek, 1977; Cox, Ingersoll y Ross, 1985). Unos años más tarde, aparecieron los modelos paramétricos parsimoniosos que a través de la estimación de factores caracterizaron la estructura temporal de las tasas de interés mediante el nivel, la pendiente y la curvatura de dicha estructura (Nelson-Siegel, 1987 y Svensson, 1994). Cabe destacar que este tipo de modelos admite oportunidades de arbitraje, es decir, las primas de riesgo de las tasas de interés de largo plazo no pueden ser separadas de las expectativas de las tasas de interés de corto plazo futuras. Posteriormente, surgen los modelos afines³ los cuales incorporan la condición de no arbitraje (Duffie y Kan, 1996; Dai y Singleton, 2000; Ang y Piazzesi, 2003; para el caso de México se tiene a Cortés y Ramos-Francia, 2008). Los modelos afines difieren unos de otros en dos formas: una es con respecto a la función afin utilizada, la cual puede ser lineal, exponencial, etc., y la otra forma es con respecto a cómo se consideran las variables de estado dentro del modelo afin, las cuales pueden ser no observables o latentes (Ang y Piazzesi, 2003; Ang, Bekaert y Wei, 2007), o pueden ser observables. Estas últimas

³ El término afin se refiere a que las tasas de interés de los bonos son afines al vector de estados. En otras palabras, las tasas de interés tienen una relación lineal con las variables de estado.

pueden ser estimadas por diferentes métodos, entre los más comunes se tienen: Nelson-Siegel (Diebold y Li, 2006; Favero, Niu y Sala, 2007; Gimeno y Marques, 2009; De Pooter y Ravazzolo, 2010; Yu y Zivot, 2011) y componentes principales (Sethi, 2008; Cortés, Ramos-Francia y Torres, 2008 para el caso de México). Un gran número de estudios en años recientes se han enfocado en pronosticar dicha estructura para diferentes horizontes de tiempo (Mönch, 2005; Diebol y Li, 2006; Chistensen, Diebold y Rudebusch, 2007; Favero, Niu y Sala, 2007; De Pooter y Ravazzolo, 2010; Yu y Zivot, 2011; entre otros).

En particular, la finalidad de este documento es mostrar que utilizando un modelo afín con factores exógenos, estimados mediante la técnica de componentes principales, donde se incorpora la condición de no arbitraje, mejora el desempeño de predicción de la estructura temporal de las tasas de interés en México. Cabe destacar que la estructura del modelo es similar al de Gimeno y Marques (2009).⁴

Además, para mostrar el desempeño relativo del modelo propuesto, se presentan los pronósticos fuera de muestra estimados mediante el modelo afín con factores exógenos y 4 modelos de referencia de las tasas de interés para vencimientos selectos, basados en una tasa forward, un AR(1), un VAR(1) y un modelo de caminata aleatoria, respectivamente.

Como resultados principales se tienen los siguientes: Primero, en horizontes de pronóstico corto (12 meses) y mediano (18 meses), los pronósticos de las tasas de interés fuera de muestra obtenidos mediante los modelos afines son comparables con los pronósticos obtenidos con los otros modelos considerados. No obstante, en un horizonte de pronóstico más largo (24 meses), los modelos afines incrementan su desempeño de pronóstico con respecto a los otros modelos de referencia. Además, para vencimientos largos (5 años), los modelos afines, en promedio, proporcionan mejores pronósticos que los otros 4 modelos

⁴ La diferencia radica en que en el modelo de Gimeno y Marques (2009) se utilizan como factores observables las componentes obtenidas mediante el modelo de Nelson y Siegel (1987). Mientras que en este documento se utilizan como factores observables las primeras tres componentes principales derivadas de la estructura temporal de las tasas de interés. Además, en Gimeno y Marques (2009) consideran la tasa de inflación como un componente extra debido a que su modelo es utilizado para extraer la expectativa de tasa de inflación del mercado y no para pronosticar. La idea es aprovechar la estructura de este modelo y ver el comportamiento de los pronósticos de la curva de rendimientos en el modelo más simple, considerando sólo los tres factores derivados de la estructura temporal de las tasas de interés.

considerados, para cualquier horizonte de pronóstico.⁵ Segundo, cabe destacar que los porcentajes de los RMSEs⁶ obtenidos en los pronósticos fuera de muestra para un horizonte de pronóstico de 12 meses tienen magnitudes similares a los obtenidos por otros estudios en la literatura, por ejemplo, Mönch (2005).

Además, para reforzar los resultados antes descritos, se presenta la prueba estadística de Harvey, Leybourne y Newbold (1997), la cual es una modificación de la prueba estadística de Diebold y Mariano (1995) ajustada a muestras pequeñas. Con ésta se compara si los pronósticos de los modelos afines son iguales que los pronósticos obtenidos de los otros 4 modelos de referencia.

El documento se divide de la siguiente manera. En la Sección 2 se presentan los datos y una descripción estadística de éstos. En la Sección 3 se describe paso a paso el modelo afín con factores exógenos. Además, en la Sección 4 se presenta el ajuste del modelo afín dentro de muestra. En la Sección 5 se proporcionan los pronósticos fuera de muestra del modelo afín con factores exógenos y se comparan con los pronósticos obtenidos de los cuatro modelos de referencia considerados. Asimismo, se presenta la prueba estadística de Harvey, Leybourne y Newbold (1997) para comparar si los pronósticos provenientes de dos modelos diferentes son iguales o distintos. Finalmente, en la Sección 6 se concluye.

⁵ La intuición de por qué los modelos afines predicen mejor los vencimientos de largo plazo en horizontes largos es debido a que éstos incluyen aversión al riesgo en la estimación de la estructura temporal de las tasas de interés. Lo anterior hace a los modelos afines más robustos en ambientes de inestabilidad de parámetros, no linealidades y no normalidad. Para más detalles se puede consultar Yu y Zivot (2011).

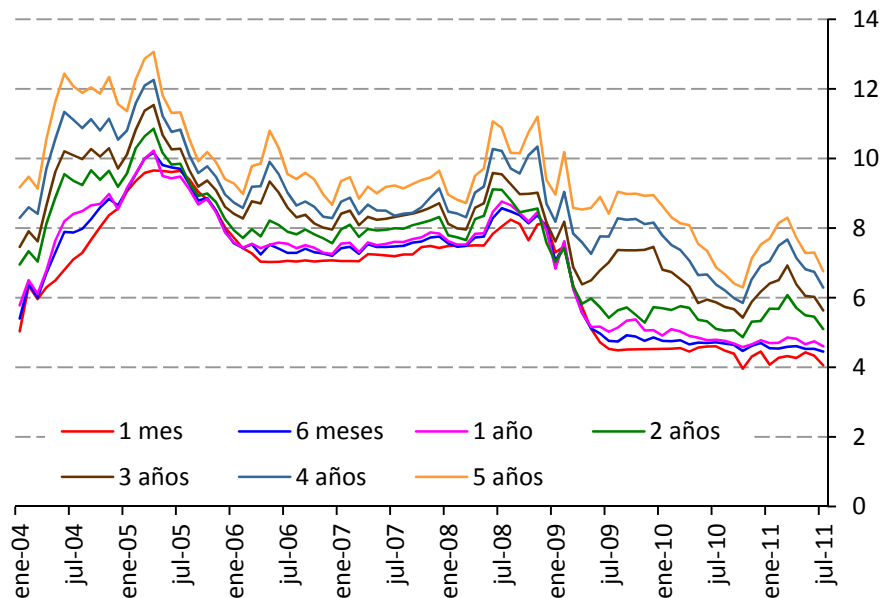
⁶ RMSEs significa raíz cuadrada de los errores cuadráticos medios (en inglés Root Mean Square Errors), el cual es un indicador estándar que mide que tan ajustados están los valores pronosticados con respecto a los valores observados.

2. Datos

Para las estimaciones de los modelos se utilizaron las tasas de interés de bonos cupón cero con vencimientos que van de 1 hasta 60 meses, con periodicidad mensual⁷ para la muestra que abarca de enero de 2004 a julio de 2011.⁸ Los datos fueron obtenidos de Valmer.

En la Figura 1 se presentan las series de tiempo de las tasas de interés de bonos cupón cero para vencimientos selectos que se utilizarán en el análisis.

Figura 1. Estructura temporal de las tasas de interés para vencimientos selectos



De la Figura 1 se observa que, en general, a partir de febrero de 2004 las tasas de interés comenzaron a subir considerablemente hasta alcanzar un máximo de febrero a agosto de 2005. Después empezaron a disminuir hasta abril de 2006 en donde se mantuvieron en un rango aproximado de 7.5 a 9.5% hasta abril de 2008. Posteriormente, tuvieron un repunte

⁷ Los datos mensuales corresponden a la última observación de cada mes de las tasas de interés de los bonos cupón cero, nominal libre de riesgo (CETES con impuestos).

⁸ Cabe destacar que, derivado de la remonetización que se dio con la adopción del esquema de objetivos de inflación, los niveles de las tasas de interés se redujeron considerablemente a partir de 2001 y hasta julio de 2003. Para evitar que los resultados del análisis se vean alterados por dicha dinámica se decidió empezar el análisis a partir de enero de 2004.

que se extendió a diciembre de 2008 y, finalmente, comenzaron a disminuir tomando un nivel más bajo en julio de 2009, el cual se ha mantenido estable en un rango aproximado de 4 a 8%, para los diferentes vencimientos de las tasas de interés de bonos cupón cero que van de un mes hasta 5 años.

En el Cuadro 1, se presentan las estadísticas más importantes de la estructura temporal de las tasas de interés para algunos vencimientos. De dichas estadísticas se observa que no es posible rechazar, al menos al 5% de confianza, la hipótesis de normalidad en los datos de las tasas de interés (ver, estadístico Jarque-Bera y su probabilidad). Otra característica importante de las tasas de interés es que a pesar de que gráficamente se ve más movimiento en las tasas de interés de largo plazo (de 2 años a 5 años), sus desviaciones estándar son menores que las de las tasas de corto plazo (menores o iguales a un año). Finalmente, se observa que los coeficientes de autocorrelación son significativos, al menos a un nivel de 5% de confianza. Además, el coeficiente de $\rho(1)$ para los diferentes vencimientos de las tasas de interés es cercano a uno.

Cuadro 1. Estadísticas de la estructura temporal de las tasas de interés para vencimientos selectos

Estadísticas	Vencimientos en meses					
	1	6	12	24	36	60
Media	6.677	6.919	7.031	7.534	8.171	9.476
Mediana	7.070	7.429	7.528	7.894	8.306	9.283
Máximo	9.653	10.170	10.226	10.855	11.535	13.062
Mínimo	3.959	4.450	4.580	4.865	5.427	6.294
Desv. Est	1.677	1.664	1.602	1.570	1.450	1.522
Asimetría	-0.139	-0.156	-0.197	-0.085	0.027	0.261
Curtosis	1.919	1.873	1.827	1.971	2.355	2.745
Jarque-Bera	4.726	5.186	5.802	4.123	1.587	1.279
Probabilidad	0.094	0.075	0.055	0.127	0.452	0.527
$\rho(1)$	0.965*	0.965*	0.960*	0.959*	0.942*	0.913*
$\rho(12)$	0.327*	0.358*	0.376*	0.414*	0.394*	0.288*
$\rho(18)$	-0.112*	-0.133*	0.140*	0.177*	0.144*	0.044*
$\rho(24)$	-0.019*	0.000*	0.004*	0.028*	0.037*	-0.042*

Un asterisco (*) indica que los coeficientes de autocorrelación son estadísticamente significativos a un nivel de 5% de confianza. El periodo de estimación abarca de enero de 2004 a julio de 2011.

3. El Modelo Afín con Factores Exógenos

Los motivos de utilizar un modelo afín con factores exógenos en lugar de algún otro modelo ya existente en la amplia literatura de la estructura temporal de las tasas de interés son los siguientes: Primero, el utilizar un modelo de Nelson-Siegel⁹ produce un buen ajuste, ya que éste al ser un modelo parsimonioso captura adecuadamente el nivel, la pendiente y la curvatura de la estructura temporal de las tasas de interés, la desventaja es que no considera condiciones de no arbitraje. Segundo, dentro de los modelos que incorporan la condición de no arbitraje están los modelos afines con factores latentes (Ang y Piazzesi, 2003; Ang, Bekaert, Wei, 2007), cuya desventaja es que al momento de su estimación dependen fuertemente de las condiciones iniciales propuestas, de la selección arbitraria de los vencimientos de las tasas de interés que tienen que ser observadas sin error, así como de las restricciones impuestas en los parámetros para conseguir convergencia. Con esta idea, para evitar las desventajas de los dos modelos antes mencionados, se propone el modelo afín con factores exógenos. Por un lado, con los factores exógenos (estimados mediante componentes principales) este modelo captura la dinámica de la estructura temporal de las tasas de interés en cuanto a su nivel, su pendiente y su curvatura;¹⁰ por otro lado, a través de la estructura del modelo afín, se incorpora la condición de no arbitraje y la aversión al riesgo. Una ventaja del modelo propuesto es que se imponen menos restricciones, lo que proporciona un modelo parsimonioso y robusto, con el cual se pueden realizar pronósticos de la estructura temporal de las tasas de interés.

A continuación se describe paso a paso la estimación del modelo afín con factores exógenos.

⁹ Este es un modelo paramétrico parsimonioso de corte transversal que, a través de la estimación de tres factores, caracteriza la estructura temporal de las tasas de interés. Los factores corresponden al nivel, la pendiente y la curvatura de la estructura temporal de las tasas de interés. Para más detalles ver Nelson-Siegel (1987).

¹⁰ Para más detalles ver Cortés, Ramos-Francia y Torres (2008).

3.1 Estimación del Modelo Afín

Debido a que el modelo afín es ya bien conocido en la literatura¹¹, aquí solamente se presentan sus características más importantes, así como su representación y la interpretación de algunos parámetros.

Como un primer paso, se estiman las tres variables de estado o factores $\mathbf{X}_t = [X_t^1, X_t^2, X_t^3]$, mediante el método de componentes principales.

Segundo, se supone una relación afín entre la tasa de corto plazo, $y_t^{(1)}$, y las variables de estado o factores del modelo, es decir:

$$y_t^{(1)} = \delta_0 + \boldsymbol{\delta}'_1 \mathbf{X}_t + \varepsilon_t^{(1)}. \quad (1)$$

Se utiliza la tasa de interés con vencimiento de un mes como la tasa de corto plazo observable y se estiman los parámetros δ_0 y $\boldsymbol{\delta}_1$ mediante el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).

Tercero, se considera que las variables de estado siguen la dinámica de un VAR(1), es decir,

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\phi} \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{e}_t, \quad \mathbf{e}_t \sim N(0, \mathbf{I}), \quad (2)$$

donde el parámetro $\boldsymbol{\mu}$ es un vector de constantes (corresponde al intercepto del vector de estados \mathbf{X}_t), $\boldsymbol{\Sigma}$ es la matriz de covarianzas del término de error \mathbf{e}_t y $\boldsymbol{\phi}$ es una matriz de coeficientes autorregresivos. Hay que recordar que las variables de estado X_t^1, X_t^2, X_t^3 son conocidas, así que se pueden estimar los parámetros $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\phi}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ a través de MCO.

Cuarto, se procede a estimar los parámetros del modelo afín, mediante la maximización de la función de verosimilitud de los errores, generados entre las tasas de interés observadas y las tasas de interés estimadas por el modelo afín, $\varepsilon_t^{(k)} = y_t^{(k)} - \hat{y}_t^{(k)}$ con $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$. Las

¹¹ Ver Duffie y Kan (1996); Dai y Singleton (2000); Ang y Piazzesi (2003).

variables $y_t^{(k)}$ y $\hat{y}_t^{(k)}$ son la tasa de interés observada y estimada al tiempo t con vencimiento en k , respectivamente.

Finalmente, se construyen las tasas de interés estimadas mediante la relación:

$$\hat{y}_t^{(k)} = -\frac{1}{k}(\hat{A}_k + \hat{\mathbf{B}}_k' \hat{\mathbf{X}}_t). \quad (3)$$

Los cambios en las tasas de interés a través del tiempo serán el resultado de cambios en los factores \mathbf{X}_t , mientras que las diferencias en la estructura temporal de las tasas de interés serán causadas por los coeficientes \hat{A}_k y $\hat{\mathbf{B}}_k'$.

Como ya se mencionó, una de las características importantes de los modelos afines es la condición de no arbitraje¹², la cual restringe a los coeficientes \hat{A}_k y $\hat{\mathbf{B}}_k$ de la ecuación (3) de la siguiente forma:

$$e^{A_{k+1} + \mathbf{B}'_{k+1} \mathbf{X}_t} = E_t \left[e^{A_1 + \mathbf{B}'_1 \mathbf{X}_t} e^{A_k + \mathbf{B}'_k \mathbf{X}_{t+1}} \right]. \quad (4)$$

Los coeficientes \hat{A}_k y $\hat{\mathbf{B}}_k$ son obtenidos recursivamente de la ecuación (4) resolviendo la esperanza E_t , quedando como:

$$\hat{A}_{k+1} = \hat{A}_k + \hat{\mathbf{B}}_k' (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda}_0) + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{B}}_k' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Sigma}' \hat{\mathbf{B}}_k - \delta_0, \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{B}}'_{k+1} = \hat{\mathbf{B}}'_k (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda}_1) - \boldsymbol{\delta}'_1. \quad (6)$$

Con $\hat{A}_1 = -\delta_0$ y $\hat{\mathbf{B}}_1 = -\boldsymbol{\delta}_1$. Además, $\boldsymbol{\lambda}_0$ es un vector y $\boldsymbol{\lambda}_1$ es una matriz de coeficientes. Los valores de los parámetros $\boldsymbol{\lambda}_0$ y $\boldsymbol{\lambda}_1$ se encuentran mediante la maximización de la

¹² La condición de no arbitraje garantiza la existencia de una medida neutral al riesgo que permite, en este caso, que las tasas de interés sean expresadas en términos de resultados futuros de la estructura temporal. Las medidas neutras al riesgo son usualmente convertidas en probabilidades que utilizan la derivada de Radon-Nikodym, denotadas por ξ_t , que sirven para encontrar explícitamente la esperanza E_t . Para más detalles se puede consultar Ang y Piazzesi (2003); Gimeno y Marques (2009).

función de verosimilitud de los errores entre las tasas de interés observadas y las tasas de interés derivadas del modelo afín.

Los coeficientes recursivos \hat{A}_{k+1} y \hat{B}'_{k+1} determinan las tasas de interés con vencimiento en $k+1$. Dichos coeficientes son el resultado de la agregación de: los determinantes de las tasas de interés de corto plazo (δ_0 y δ'_1), las diferencias entre la tasa de corto plazo actual y su valor pronosticado (dados por $\hat{A}_k + \hat{B}'_k \mu$ y $\hat{B}'_k \phi$), una compensación por riesgo ($\hat{B}'_k \Sigma \lambda_0$ y $\hat{B}'_k \Sigma \lambda_1$) y un término cuadrático que viene de la desigualdad de Jensen aplicada para determinar dichos coeficientes ($\frac{1}{2} \hat{B}'_k \Sigma \Sigma' \hat{B}_k$).

Cabe observar que los parámetros λ_0 y λ_1 son el resultado de considerar aversión al riesgo en el modelo.¹³ Esto es debido a que se tendrá alguna compensación por la incertidumbre en las tasas de interés de largo plazo, en las cuales el choque aleatorio e_t en (2) es acumulativo. Cabe destacar que a mayores choques aleatorios en el VAR, representado por la ecuación (2), se generará mayor incertidumbre en los valores futuros de las tasas de interés. Por lo tanto, para compensar a los agentes que invierten en tasas de largo plazo, se considera una prima de riesgo relativa a Σ que será integrada en las tasas de interés. Así, los coeficientes que trasladan la matriz Σ dentro de la prima de riesgo son llamados precios de riesgo (λ_t) y, de acuerdo a la literatura, estos coeficientes son también afines a las variables de estado X_t . Dichos precios de riesgo están representados por la expresión:

$$\lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1 X_t. \quad (7)$$

Cabe destacar que si $\lambda_1=0$, entonces la prima de riesgo será constante. Mientras que si $\lambda_1 \neq 0$, la prima de riesgo variará en el tiempo. El cambio en la prima de riesgo, λ_t , a través del tiempo estará determinado por el cambio en los factores.

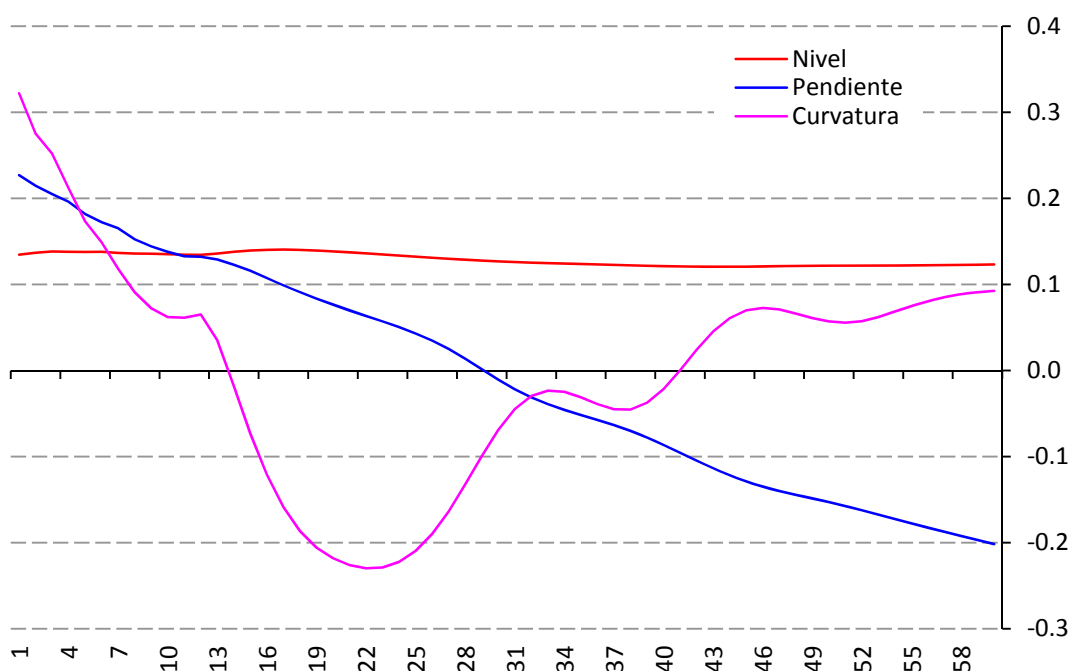
Dadas las condiciones del modelo, a continuación se muestran los resultados obtenidos.

¹³ Para mayores detalles ver Ang y Piazzesi (2003); Gimeno y Marqués (2009).

3.2 Estimación de los Factores Exógenos

Mediante el método de Componentes Principales (CP),¹⁴ se estiman las tres variables de estado o factores $X_t = [X_t^1, X_t^2, X_t^3]$, que corresponden al nivel, la pendiente y la curvatura de la estructura temporal de las tasas de interés. Los pesos de los factores a través del vencimiento de la tasa de interés que se obtienen utilizando el método de CP se pueden ver en la Figura 2.

Figura 2. Pesos de los factores con respecto al vencimiento de las tasas de interés



El eje y corresponde al peso del componente principal correspondiente al Nivel (X_t^1), la Pendiente (X_t^2) y la Curvatura (X_t^3) en cada vencimiento, respectivamente. En el eje x se tienen los vencimientos de las tasas de interés, que van de 1 hasta 60 meses.

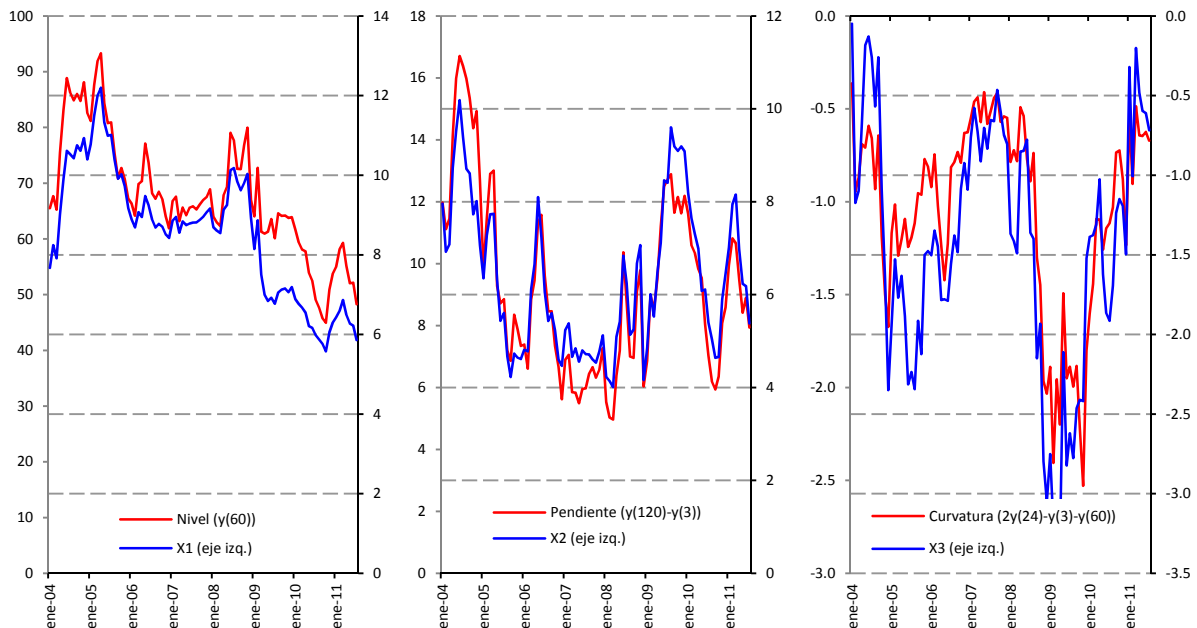
El análisis del significado de cada componente principal puede verse en Cortés, Ramos-Francia y Torres (2008), en donde se encuentra que los pesos del primer componente principal, al ser casi horizontales, corresponden al nivel de la curva de las tasas de interés. Así, los desplazamientos de ésta son en forma paralela. Los pesos del segundo componente principal corresponden a la pendiente y al ser éste negativo, significa que los cambios en este componente rotan la curva de las tasas de interés. Finalmente, el peso del tercer

¹⁴ Ver Tipping y Bishop (1999); Jolliffe (2002).

componente corresponde a la curvatura debido a que los extremos de corto y largo plazo aumentan con respecto al resto de los plazos, mientras que las tasas de interés de mediano plazo disminuyen.¹⁵

En la Figura 3, se muestran los factores o variables de estado \mathbf{X}_t , las cuales representan el nivel, la pendiente y la curvatura de la estructura temporal de las tasas de interés. Además, se grafican las tasas de interés y sus respectivas combinaciones lineales que, de acuerdo a la literatura, representan dichos componentes. Por ejemplo, el vencimiento máximo de la tasa de interés es equivalente al nivel de la estructura temporal ($nivel = y_t^{(60)}$), la tasa de interés con vencimiento de mayor plazo menos la tasa de interés con vencimiento de 3 meses corresponde a la pendiente de dicha estructura temporal ($pendiente = y_t^{(60)} - y_t^{(3)}$). Finalmente, dos veces la tasa de interés con vencimiento de 2 años menos la tasa de interés con vencimiento de 3 meses menos la tasa de interés con vencimiento máximo corresponderá a la curvatura ($curvatura = 2y_t^{(24)} - y_t^{(3)} - y_t^{(60)}$).

Figura 3. Nivel, pendiente y curvatura de la estructura temporal de las tasas de interés con vencimiento máximo de 60 meses



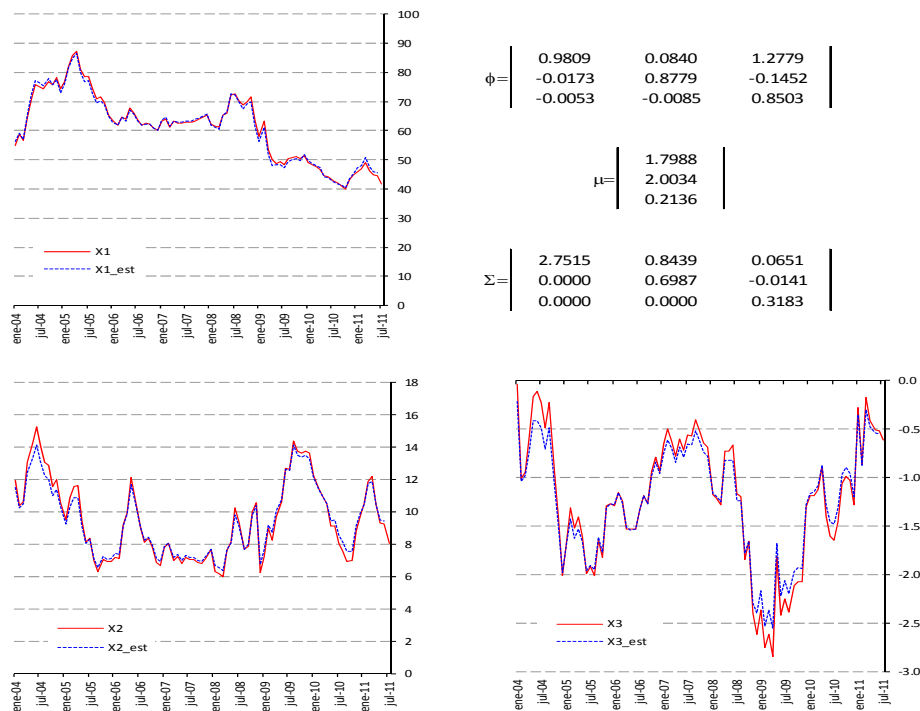
¹⁵ Cabe destacar que todos estos hechos fueron encontrados por Cortés, Ramos-Francia y Torres (2008) en un análisis empírico de la estructura temporal de las tasas de interés para México en el periodo del 26 de julio de 2001 al 20 de marzo de 2008. El análisis aquí presentado abarca de enero de 2004 a julio de 2011. Por lo anterior, se conserva la estructura (o forma) y el significado de los componentes principales. Para más detalle se puede consultar Diebold y Li (2006).

4. Ajuste del Modelo Afín versus los Datos Observados

Primeramente, se estiman las variables de estado $\mathbf{X}_t = [X_t^1, X_t^2, X_t^3]$ mediante la técnica de componentes principales, para posteriormente ajustar un VAR(1) a dichas variables de estado, ver ecuación (2). El modelo VAR toma en cuenta la predictibilidad observada en las tasas de interés, pero al mismo tiempo tiene un grado de incertidumbre en el valor futuro de las tasas de interés representado por el vector \mathbf{e}_t , el cual es considerado ruido blanco.

En la Figura 4 se muestra el ajuste del vector de estados \mathbf{X}_t con los componentes obtenidos del VAR(1), así como los parámetros estimados $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\phi}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$. Cabe destacar que la matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ es considerada triangular superior.¹⁶

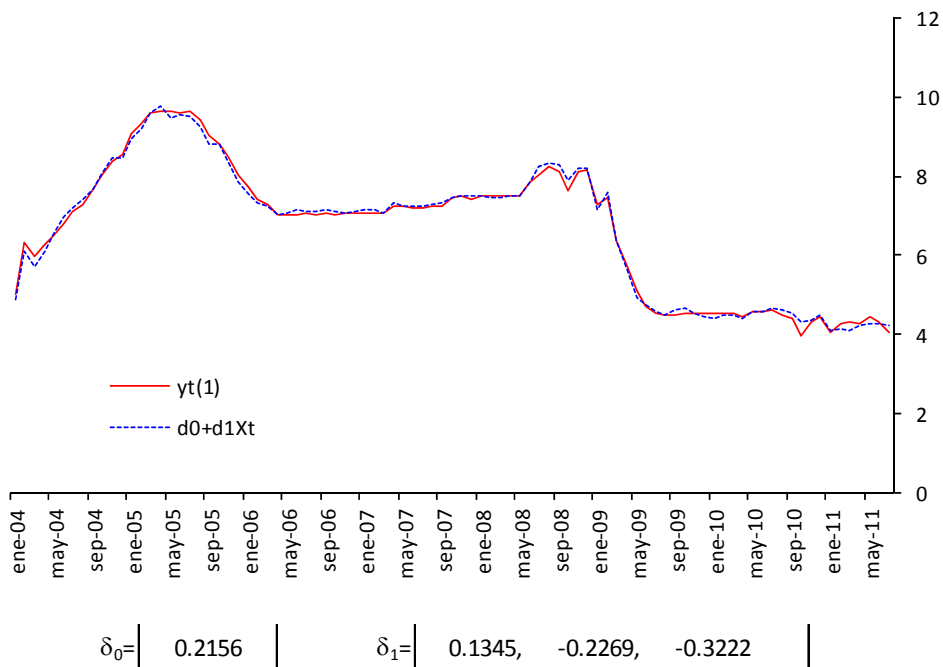
Figura 4. Ajuste de cada componente del VAR(1) al vector de estados \mathbf{X}_t y los parámetros estimados



¹⁶ En los modelos afines con factores latentes (ver Ang y Piazzesi, 2003), generalmente se restringe a que la matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ sea triangular (superior o inferior), para evitar problemas de identificación de parámetros al estimar el modelo. En este caso, como dicha matriz es estimada por MCO exógenamente al modelo afín, ésta puede obtenerse sin ningún problema de identificación. Se consideró la matriz triangular superior porque es con la que se obtuvo un mejor ajuste a la estructura temporal de las tasas de interés.

Por otro lado, se considera que la tasa de interés de corto plazo r_t es una función afín a las variables de estado X_t , ver (1). Dado que se está trabajando con datos mensuales se puede usar la tasa de interés con vencimiento de un mes, $y_t^{(1)}$, como la tasa de interés de corto plazo observable. En la Figura 5 se presenta el ajuste de la tasa de interés de un mes con respecto a su función afín.

Figura 5. Tasas de interés de corto plazo tanto observada como estimada y sus respectivos parámetros



Considerando la condición de no arbitraje y la aversión al riesgo, es posible transformar la ecuación (4) en un sistema recursivo de ecuaciones, cuya solución está dada por las ecuaciones (5) y (6). Estas dos últimas determinarán los coeficientes $(\hat{A}_{k+1}$ y $\hat{B}'_{k+1})$ de las tasas de interés con vencimiento en $k+1$. Definidos los coeficientes, se estiman las tasas de interés a diferentes vencimientos k , $\hat{y}_t^{(k)}$, mediante la ecuación (3).

La estimación de los parámetros del modelo afín con factores exógenos se realiza mediante la maximización de la función de verosimilitud de los errores, generados entre las tasas de interés observadas y las tasas de interés estimadas por el modelo afín, $\varepsilon_t^{(k)} = y_t^{(k)} - \hat{y}_t^{(k)}$ con $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$. Las variables. $y_t^{(k)}$ y $\hat{y}_t^{(k)}$ son la tasa de interés observada y estimada al tiempo t con vencimiento en k , respectivamente.¹⁷

Para poder identificar los parámetros estimados (λ_0 , λ_1 y σ), se considera el caso más simple en el cual λ_1 es una matriz diagonal y el error del modelo, ε_t , tiene una matriz de covarianza diagonal constante, $\sigma^2 \mathbf{I}$ ¹⁸ Así los parámetros estimados son:

$$\lambda_1 = \begin{vmatrix} 0.0003 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1135 & 0 \\ 0 & 0 & 5.9872 \end{vmatrix} \quad \lambda_0 = \begin{vmatrix} -0.4879, & -7.3149, & -3.5983 \\ \sigma = 0.3426 \end{vmatrix}$$

Finalmente, con los parámetros estimados y las variables de estado conocidas, se pueden obtener los coeficientes \hat{A}_{k+1} y \hat{B}'_{k+1} , y así obtener las tasas estimadas de interés mediante la ecuación (3). En la Figura 6 se muestra el ajuste entre las tasas de interés observadas y las tasas de interés estimadas mediante el modelo afín con factores exógenos, para los vencimientos $k=6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54$ y 60 meses.

¹⁷ Dado que la muestra de las series de tiempo de las tasas de interés de bonos cupón cero abarca de enero de 2004 a julio de 2011, podría pensarse que se tiene un número reducido de observaciones (91 meses) para la estimación y los pronóstico de las tasas de interés. Por lo anterior, para obtener un mejor ajuste, el modelo afín con factores exógenos requiere el uso consecutivo de las tasas de interés. En este caso, se incluye en la muestra las tasas de interés desde un mes hasta 5 años de vencimiento, lo cual da 60 tasas de interés para cada mes considerado. Cabe destacar que si se quisiera pronosticar una tasa de interés con vencimiento de 120 meses, entonces se requerirían las tasas de interés con vencimientos que van desde 1 mes hasta 120 meses. Lo que puede hacer la convergencia del modelo muy lenta computacionalmente.

¹⁸ Las restricciones impuestas a las matrices λ_l y Σ son requeridas para identificar los parámetros, debido a que se tienen pocos datos observados para realizar la estimación de la estructura temporal de las tasas de interés. Cabe destacar que este tipo de restricciones son muy comunes en la literatura, ver por ejemplo, Ang y Piazzesi (2003); Gimeno y Maques (2009). Lo que se pierde al hacer este tipo de restricciones es quitarle un poco de flexibilidad al modelo, en el sentido de que no se está permitiendo interacción entre los vencimientos de las tasas de interés, lo que puede producir una sub(o sobre) estimación de la estructura temporal de las tasas de interés.

De la Figura 6 se puede observar que en general, el modelo afín con factores exógenos replica bien las tasas de interés para diferentes vencimientos. Aunque, para vencimientos de muy largo plazo (54 a 60 meses) el modelo sobreestima las tasas de interés al final de la muestra y subestima al principio de dicha muestra.¹⁹ Sin embargo, para vencimientos de corto y mediano plazo (12, 24 y 36 meses) el modelo ajusta bien los datos observados de las tasas de interés. Además, para las tasas de muy corto plazo (6 meses), el modelo parece subestimar un poco los datos observados.

Para complementar el análisis, en el Cuadro 2 se presentan indicadores que miden el ajuste del modelo con respecto a los datos observados. Para ello, se calculan el error absoluto medio (EAM), el porcentaje de error absoluto medio (PEAM) y la raíz del error cuadrático medio (RECM, mejor conocido con siglas en inglés como RMSE).²⁰

Cuadro 2. Errores del ajuste del modelo afín con factores exógenos

Vencimientos (meses)	EAM	PEAM (%)	RMSE (RECM)
6	0.5488	8.2741	0.5741
12	0.1708	2.5788	0.2067
18	0.3188	5.5954	0.4480
24	0.3202	5.2174	0.4528
30	0.3403	4.6268	0.3794
36	0.4525	5.5367	0.5100
42	0.5260	6.0466	0.6271
48	0.5880	6.5666	0.7411
54	0.6300	7.0263	0.8226
60	0.7944	8.9528	0.9736

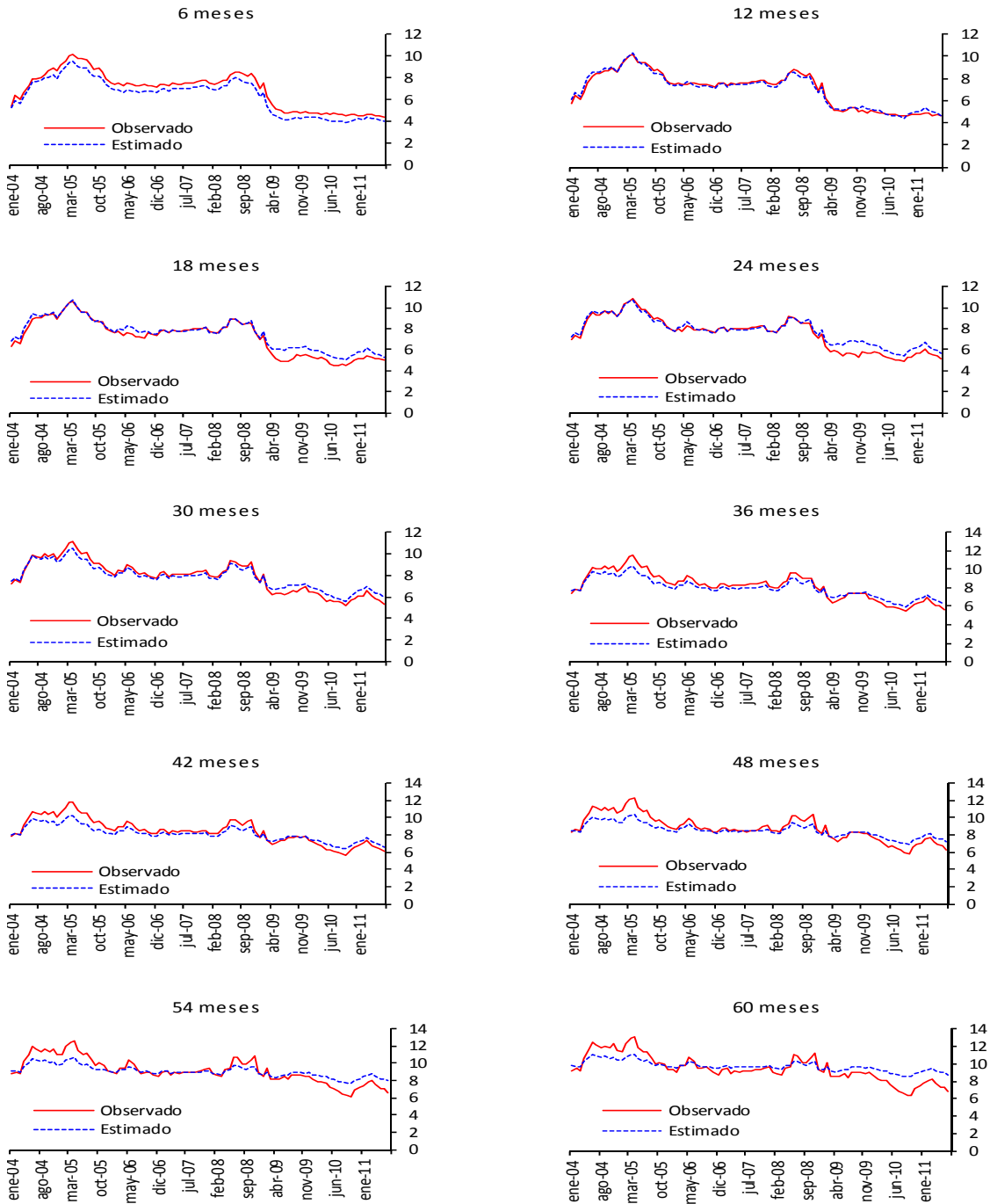
Del Cuadro 2 se observa que precisamente los vencimientos que peores ajustes tienen son los de 54 y 60 meses. Aunque sus porcentajes de errores absolutos medios, en promedio,

¹⁹ Parte de la sobre o sub estimación de las tasas de interés de más largo plazo se da debido a que para construir las, se utilizan los coeficientes \hat{A}_k y \hat{B}'_k 's y éstos son obtenidos recursivamente. Intuitivamente las \hat{A}_k y \hat{B}'_k 's correspondientes a los vencimientos de más largo plazo acarrean el error o desajuste de todos los vencimientos anteriores.

²⁰ $EAM = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \hat{x}_i|}{N}$; $PEAM = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{|x_i - \hat{x}_i|}{x_i}}{N}$; $RECM = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2}{N}}$.

son menores al 9%. Es decir, si tuviéramos 100 observaciones, en promedio, 9 no ajustarían los datos observados. Para los otros rendimientos el ajuste es mejor.

Figura 6. Series de tiempo de las tasas de interés observadas y estimadas para diez diferentes vencimientos



Dado el ajuste del modelo, éste se utiliza para pronosticar las tasas de interés fuera de muestra para diferentes vencimientos y horizontes de tiempo.

5. Pronósticos Fuera de Muestra

El que un modelo tenga un buen ajuste dentro de muestra, no significa que es el que proporciona los mejores pronósticos. De esta forma, una métrica clave para evaluar si un modelo, en particular de la estructura temporal de las tasas de interés, es adecuado para pronosticar es el pronóstico fuera de muestra. Generalmente, para estimar pronósticos fuera de muestra se divide el periodo de estudio en dos subperiodos. El primero se utiliza para estimar los parámetros del modelo y el segundo es considerado para evaluar el desempeño del pronóstico.

Para llevar a cabo los pronósticos fuera de muestra, se considera el método iterativo o dinámico²¹ debido a que en la literatura, los pronósticos realizados mediante los modelos afines utilizan dicho método, ya que es importante conservar la estructura del modelo afín en los pronósticos.²²

Por lo tanto, para pronosticar las tasas de interés mediante el modelo afín, se utilizan los coeficientes estimados \hat{A}_k y \hat{B}_k , así como el valor esperado de los factores, $E_t[\mathbf{X}_{t+h}]$, es decir, se estima el valor esperado de la tasa de interés en el horizonte de tiempo $t+h$ para el vencimiento k como:

$$E_t[\hat{y}_{t+h}^{(k)}] = -\frac{1}{k}(\hat{A}_k + \hat{B}_k' E_t[\mathbf{X}_{t+h}]). \quad (6)$$

²¹ Es decir, se obtiene el pronóstico para $y_{t+h} = a + by_{t+h-1} + e_{t+h}$ en forma recursiva a partir del modelo $y_{t+1} = a + by_t + e_{t+1}$.

²² Para más detalles se puede consultar Mönch (2005); Diebold y Li (2006); Christensen, Diebold y Rudebusch (2007); De Pooter, Ravazzolo y Dijk (2010).

Para ser consistente con la literatura y conservar la estructura del modelo afín, el pronóstico de las variables de estado, $E_t[\mathbf{X}_{t+h}]$, se hace iterativamente mediante dos métodos: un VAR(1) y un AR(1).²³

- i. Mediante el proceso recursivo del VAR(1), la esperanza de los factores en $t+h$ está dada por:

$$E_t[\mathbf{X}_{t+h}] = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\phi}^2 + \dots + \boldsymbol{\phi}^{h-1})\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\phi}^h \mathbf{X}_t.$$

- ii. Considerando a las variables de estado como variables individuales y estimando un AR(1) para cada una de ellas, es decir,

$$E_t[X_{t+h}^i] = (1 + \gamma_i + \gamma_i^2 + \dots + \gamma_i^{h-1})\mu_i + \gamma_i^h X_t^i, \quad i = 1, 2, 3.$$

De acuerdo a evidencia empírica (Diebold y Li, 2006) se ha encontrado que el pronosticar los factores o variables de estado, \mathbf{X}_t , mediante un modelo AR es mejor que utilizar un modelo VAR. Esto debido a que cuando se considera un VAR, el número de parámetros a estimar es mayor que cuando se tiene un AR. Además, puede suceder que los factores en corte transversal no estén altamente correlacionados. No obstante, por otro lado, la dinámica de los factores o variables de estado fueron estimados mediante un VAR(1). Así, para ser consistentes tanto con la literatura como con la estimación original, en el artículo se analizan ambos casos.

5.1 Modelos Competitivos de Referencia

Un modelo será competitivo con respecto a otro modelo si estadísticamente proporciona pronósticos similares. Para verificar si el modelo afín con factores exógenos es competitivo o incrementa la habilidad de pronóstico, se compara el pronóstico de las tasas de interés fuera de muestra versus los siguientes 4 modelos estimados con datos observados:

²³ Ver Diebold y Li (2006).

a. **Tasas forward.** Para su estimación se utiliza la fórmula:

$$f_t^{(i \text{ periodo} \rightarrow j \text{ periodo})} = \left[\frac{(1 + y_t^{(j \text{ periodo})})^j}{(1 + y_t^{(i \text{ periodo})})^i} \right]^{1/(j-i)} - 1,$$

con $i < j$ los vencimientos de las tasas de interés, $y_t^{(j)}$. Como insumo se utilizan las tasas de interés de bonos cupón cero observadas a diferentes vencimientos.

b. **Trayectoria fija o caminata aleatoria.** Se considera una trayectoria fija para todo el horizonte de pronóstico, es decir, las tasas de interés son pronosticadas mediante la relación $y_{t+h}^{(k)} = y_t^{(k)} + \varepsilon_{t+h}^{(k)}$ para todo h el horizonte de pronóstico y k el vencimiento de la tasa de interés a ser pronosticada.

c. **Modelo VAR(1).** Los componentes del VAR están dados por $Y_t = [y_t^{(k)}, y_t^{(3)}, y_t^{(30)}, y_t^{(120)}]$ con $k=1, 12$ y 24 meses los vencimientos de las tasas de interés a ser pronosticadas y $y_t^{(3)}, y_t^{(30)}$ y $y_t^{(120)}$ las tasas de interés de los bonos cupón cero con vencimientos de 3, 30 y 120 meses, respectivamente. Para el caso de la tasa de interés con vencimiento de 36 y 60 meses, el VAR considerado es $Y_t = [y_t^{(36)}, y_t^{(1)}, y_t^{(3)}, y_t^{(90)}]$ y $Y_t = [y_t^{(60)}, y_t^{(3)}, y_t^{(36)}, y_t^{(90)}]$, respectivamente. La ecuación que se utiliza para su estimación y pronóstico es $Y_t = \alpha_k + \beta_k Y_{t-1} + \varepsilon_t^{(k)}$, con $k=1, 12, 24, 36$ y 60 meses. Cabe destacar que por consistencia, en este caso también se utiliza el modelo iterativo para que sea comparable con el modelo afín.

d. **Modelo Autorregresivo estándar AR(1).** La ecuación a utilizar es $y_t^{(k)} = a_k + b_k y_{t-1}^{(k)} + e_t^{(k)}$, con $k=1, 12, 24, 36$ y 60 meses los vencimientos de las tasas de interés a ser pronosticadas. Análogo al modelo anterior, por consistencia, en este caso también se utiliza el método iterativo para que sea comparable con el modelo afín.

5.2 Estimación de los Pronósticos Fuera de Muestra

Para ejemplificar como se realizaron los pronósticos fuera de muestra, se considera el caso de un horizonte de pronóstico de 12 meses. Para ello, se utilizan los datos de enero de 2004 a enero de 2008 como el periodo de estimación de los modelos y de enero de 2009 a diciembre de 2010 (24 predicciones) como el periodo fuera de muestra que se usará para realizar los pronósticos de la estructura temporal de las tasas de interés. Además, se utiliza una ventana móvil para estimar los parámetros de cada modelo basada en la idea de tener siempre la información más reciente al momento de realizar el pronóstico.²⁴ Por ejemplo, para predecir la tasa de interés correspondiente a enero de 2009, se consideran los datos para estimar los modelos de enero de 2004 a enero de 2008. Análogamente, para el siguiente mes se toma el periodo de muestra para estimar los modelos de febrero de 2004 a febrero de 2008 y así predecir la correspondiente tasa de interés en febrero de 2009. Este procedimiento se hace sucesivamente hasta obtener las 24 predicciones requeridas.

Por otro lado, para horizontes más largos (18 y 24 meses), se tiene que disminuir el tamaño de la muestra que se utiliza para estimar los modelos de manera que siempre se mantengan 24 predicciones fuera de muestra. Los vencimientos de las tasas de interés a pronosticar son 1, 12, 24, 36 y 60 meses, y los horizontes de pronóstico son 12, 18 y 24 meses.

Para examinar qué método es el que tiene un mejor desempeño en pronosticar la estructura temporal de las tasas de interés para los vencimientos selectos en los diferentes horizontes de pronóstico, se considera la Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio (por siglas en inglés RMSE²⁵).

²⁴ Debido a que se pueden observar cambios importantes en los niveles de las tasas de interés (ver Figura 1) durante el periodo de análisis, Giacomini y White (2006) recomiendan utilizar este método.

²⁵ $RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2}{N}}$ con x_i el valor realizado y \hat{x}_i el valor pronosticado.

Cabe mencionar que en los casos en que los errores cuadráticos (EC)²⁶ entre el valor observado y el valor pronosticado eran muy grandes, se utilizó la técnica aplicada por Yu y Zivot (2011), en la que se considera el método de interpolación para sustituir predicciones extremas. En la estimación de los RMSEs de este documento (ver Cuadros 3 y 4), la interpolación de los casos extremos se hace sobre los errores cuadráticos medios de cada pronóstico para mantener así la muestra original de 24 errores cuadráticos en cada horizonte de pronóstico y vencimiento seleccionado.²⁷

En el Cuadro 3 se presenta la comparación de los RMSEs de los pronósticos fuera de muestra para los diferentes métodos considerados. Para facilitar la lectura de los resultados, se exhibe el error relativo entre los RMSEs de los pronósticos de los modelos competitivos versus los RMSEs de aquéllos obtenidos de los modelos afines (ver Cuadros 3 y 4). Así, valores mayores a 1 implicarán que el modelo competitivo tuvo un peor desempeño en la predicción de las tasas de interés que el respectivo modelo afín, y por consiguiente, valores menores a 1 corresponderán a un mejor desempeño del modelo competitivo. Cabe mencionar que CP+Afín corresponde al modelo afín con variables exógenas. De dicho cuadro se puede resumir lo siguiente.

Comparando entre los dos modelos afines se tiene que, el modelo afín cuyas variables de estado son pronosticadas con un VAR(1) (columna 2a del Cuadro 4) tiene un mejor desempeño que el modelo afín con variables de estado pronosticadas con un AR(1) (columna 3 del Cuadro 3). En promedio, el primer modelo afín tiene menores RMSEs que el segundo modelo afín mencionado, considerando los horizontes pronosticados de 18 y 24 meses. No obstante para un horizonte de 12 meses, el segundo modelo afín proporciona mejores pronósticos que el primer modelo afín.

²⁶ $EC = (x_i - \hat{x}_i)^2$ con x_i el valor realizado y \hat{x}_i el valor pronosticado.

²⁷ Los RMSEs también fueron estimados quitando los errores cuadráticos extremos y los resultados son similares.

En general, los pronósticos de las tasas de interés fuera de muestra obtenidos mediante los modelos afines (Cuadros 3 y 4), en promedio, generan mejores resultados que las tasas forward (columnas 4 y 4a de los Cuadros 3 y 4, respectivamente). Es decir, la mayoría de los RMSEs de los modelos afines son menores que los de las tasas forward para los 3 horizontes pronosticados, así como para todas las tasas de interés con vencimientos seleccionados de 1, 12, 24, 36 y 60 meses.

Para el modelo afín donde cada variable de estado es pronosticada mediante un AR(1) (Cuadro 4), se tiene que en el horizonte de pronóstico de 12 meses y considerando los diferentes vencimientos, sus RMSEs son menores que los de un VAR(1) que utiliza las tasas de interés observadas (columna 6a). Además, el modelo afín también proporciona, en promedio, pronósticos comparables con el AR(1) que utiliza las tasas de interés observadas (columna 7a). Por su parte, la trayectoria fija (columna 5a), en promedio, parece proporcionar menores RMSEs que el modelo afín.

Con respecto al buen desempeño que tiene el modelo afín cuyas variables de estado son pronosticadas con un VAR(1) (Cuadro 3), se tiene que para un horizonte de pronóstico de 18 meses y considerando todos los vencimientos de las tasas de interés, en promedio, proporciona pronósticos comparables con la trayectoria fija, el VAR(1) y el AR(1) que utilizan tasas de interés observadas (columnas 5, 6 y 7, respectivamente). El modelo afín, en el horizonte de pronóstico de 24 meses para todas las tasas de interés con los vencimientos seleccionados, es comparable con la trayectoria fija (columna 5) y tiene menores RMSEs que el AR(1) y el VAR(1) que utilizan las tasas de interés observadas (Columnas 6 y 7, respectivamente).

Además, en todos los horizontes de pronóstico para un vencimiento de 60 meses, los modelos afines presentan menores RMSEs que los otros modelos considerados, con excepción de la trayectoria fija para un horizonte de 12 meses, quién presenta un RMSE menor.

Finalmente, comparando los seis modelos, se tiene que para un horizonte de pronóstico de 12 meses el modelo que, en promedio, mejor pronostica a las tasas de interés nominal para todos los vencimientos seleccionados es la trayectoria fija (columna 5 y 5a de los Cuadros 3 y 4, respectivamente).²⁸ Sin embargo, para un horizonte de 18 meses, hay tres modelos que presentan un buen desempeño para pronosticar las tasas de interés: la trayectoria fija, el AR(1) estimado con datos observados y el modelo afín con variables de estado pronosticadas con un AR(1) (Cuadro 4). Estos tres modelos presentan RMSEs similares y menores que todos los demás modelos. Además, para un horizonte de 24 meses, el modelo afín con variables de estado pronosticadas con un VAR(1) (Cuadro 3) es el que en promedio tiene menores RMSEs con respecto a los otros modelos de referencia. Por último, para un vencimiento de 60 meses, en promedio, para los horizontes de pronóstico considerados, los modelos que mejores pronósticos proporcionan son los modelos afines.

²⁸ Aunque cabe mencionar que el modelo AR(1) y el modelo afín con variables de estado pronosticadas con un AR(1) tienen RMSEs cercanos a la trayectoria fija.

Cuadro 3. Error relativo entre cada uno de los modelos competitivos y el modelo afín pronosticando las variables de estado con un VAR(1)*

1	2	3	4	5	6	7
Vencimiento en meses	CP+Afín Pronosticando las variables de estado con VAR(1) ^{1/}	CP+Afín Pronosticando cada variable de estado con AR(1) ^{2/}	Tasas Forward ^{3/}	Trayectoria Fija ^{4/}	VAR(1) ^{5/}	AR(1) ^{6/}
Panel A: Predicción 12 meses hacia adelante						
1	2.0754	1.0562	1.1462	0.9096	1.0938	1.0491
12	1.9881	0.8839	1.0118	0.8194	1.0403	0.8674
24	1.8861	0.9805	1.4143	0.7501	1.0842	0.8264
36	1.4031	0.9658	1.8163	0.8095	1.6912	1.0674
60	1.5553	1.0192	1.7213	0.8983	1.4363	1.2226
Panel B: Predicción 18 meses hacia adelante						
1	2.8084	1.0375	1.1631	0.8762	0.9563	0.9434
12	2.8907	0.8321	1.3645	0.7931	0.8995	0.8463
24	2.6342	0.9595	1.4810	0.7814	1.2326	0.8565
36	2.1228	1.0125	1.8362	0.8050	0.9511	0.9749
60	1.6218	1.1174	2.3460	1.1626	1.0211	1.2630
Panel C: Predicción 24 meses hacia adelante						
1	2.8650	1.0995	1.6029	1.0192	0.9525	1.0586
12	2.6833	1.0678	1.6650	1.0266	1.0204	1.0503
24	2.5774	1.0522	1.7904	0.9740	1.1475	1.0098
36	2.2295	1.0468	2.0474	0.9542	1.2404	1.0001
60	1.8349	1.0359	2.4059	1.2075	1.5623	1.1060

*El error relativo (columnas de la 3 a la 7) es obtenido como: el RMSE del modelo competitivo entre el RMSE del modelo afín cuyas variables de estado son pronosticadas con un VAR(1). Un valor mayor a 1 implica un peor desempeño del modelo competitivo, mientras que un valor menor a 1 corresponderá a un mejor desempeño del modelo competitivo. La columna 2 corresponde a los RMSEs del modelo afín a ser comparado con los otros modelos competitivos.

1/Corresponde al modelo afín con factores exógenos estimados mediante componentes principales (CP). Para todas las estimaciones se utilizaron las tasas de interés de bonos cupón cero con vencimientos de 1 a 60 meses. Las variables de estado son pronosticadas en conjunto con un VAR(1).

2/Corresponde al modelo afín con factores exógenos estimados mediante componentes principales (CP). Para todas las estimaciones se utilizaron las tasas de interés de bonos cupón cero con vencimientos de 1 a 60 meses. Cada variable de estado es pronosticada con un AR(1).

3/Las tasas forward fueron estimadas con datos observados de las tasas de interés de bonos cupón cero, mediante la fórmula:

$$f_t^{(i \text{ periodo} \rightarrow j \text{ periodo})} = \left[\frac{(1 + y_t^{(j \text{ periodo})})^j}{(1 + y_t^{(i \text{ periodo})})^i} \right]^{1/(j-i)} - 1, \text{ con } i < j \text{ los vencimientos de las tasas de interés } (y_t).$$

4/El pronóstico fuera de muestra de una trayectoria fija fue estimado mediante la relación $y_{t+h}^{(k)} = y_t^{(k)} + \varepsilon_{t+h}^{(k)}$ para todo h el horizonte de pronóstico y k el vencimiento de la tasa de interés a ser pronosticada.

5/Para la estimación y el pronóstico del VAR(1) se utilizaron las tasas de interés de bonos cupón cero con $Y_t = [y_t^{(k)}, y_t^{(3)}, y_t^{(30)}, y_t^{(120)}]$ donde k es el vencimiento de la tasa de interés a ser pronosticada, $k=1, 12$ y 24 meses con $y_t^{(1)}, y_t^{(3)}, y_t^{(90)}$ las tasas de interés con vencimientos de 3, 30 y 120 meses, respectivamente. Para el caso de la tasa de interés con vencimiento de 36 y 60 meses los VAR utilizados fueron $Y_t = [y_t^{(36)}, y_t^{(1)}, y_t^{(3)}, y_t^{(90)}]$ y $Y_t = [y_t^{(60)}, y_t^{(3)}, y_t^{(36)}, y_t^{(90)}]$, respectivamente. La ecuación que se considera para su estimación y pronóstico es $Y_t = \alpha_k + \beta_k Y_{t-1} + \varepsilon_t^{(k)}$, con $k=1, 12, 24, 36$ y 60 .

6/Es un modelo autorregresivo que considera el nivel de la tasa de interés observada. Las tasas de interés utilizadas fueron de 1, 12, 24, 36 y 60 meses de vencimiento. La ecuación que se considera en este modelo para la estimación y el pronóstico es $y_t^{(k)} = a_k + b_k y_{t-1}^{(k)} + e_t^{(k)}$ con $k=1, 12, 24, 36$, y 60 meses.

Cuadro 4. Error relativo entre cada uno de los modelos competitivos y el modelo afín pronosticando las variables de estado con un AR(1)*

1a	2a	3a	4a	5a	6a	7a
Vencimiento en meses	CP+Afín Pronosticando las variables de estado con VAR(1) ^{1/}	CP+Afín Pronosticando cada variable de estado con AR(1) ^{2/}	Tasas Forward ^{3/}	Trayectoria Fija ^{4/}	VAR(1) ^{5/}	AR(1) ^{6/}
Panel A: Predicción 12 meses hacia adelante						
1	0.9468	2.1920	1.0852	0.8612	1.0356	0.9933
12	1.1313	1.7573	1.1447	0.9270	1.1769	0.9813
24	1.0199	1.8493	1.4425	0.7651	1.1058	0.8429
36	1.0354	1.3552	1.8805	0.8381	1.7510	1.1052
60	0.9811	1.5852	1.6888	0.8813	1.4092	1.1996
Panel B: Predicción 18 meses hacia adelante						
1	0.9639	2.9136	1.1211	0.8446	0.9218	0.9094
12	1.2017	2.4055	1.6398	0.9531	1.0809	1.0170
24	1.0422	2.5275	1.5436	0.8144	1.2846	0.8926
36	0.9876	2.1493	1.8135	0.7950	0.9394	0.9628
60	0.8949	1.8123	2.0994	1.0404	0.9137	1.1303
Panel C: Predicción 24 meses hacia adelante						
1	0.9095	3.1502	1.4578	0.9270	0.8663	0.9628
12	0.9365	2.8654	1.5592	0.9614	0.9556	0.9836
24	0.9504	2.7120	1.7015	0.9256	1.0905	0.9597
36	0.9553	2.3338	1.9559	0.9115	1.1849	0.9554
60	0.9654	1.9007	2.3226	1.1657	1.5082	1.0677

*El error relativo (columnas 2a y de la 4a-7a) es obtenido como: el RMSE del modelo competitivo entre el RMSE del modelo afín cuyas variables de estado son pronosticadas con un AR(1). Un valor mayor a 1 implica un peor desempeño del modelo competitivo, mientras que un valor menor a 1 corresponderá a un mejor desempeño del modelo competitivo. La columna 3a corresponde a los RMSEs del modelo afín a ser comparado con los otros modelos competitivos.

1/Corresponde al modelo afín con factores exógenos estimados mediante componentes principales (CP). Para todas las estimaciones se utilizaron las tasas de interés de bonos cupón cero con vencimientos de 1 a 60 meses. Las variables de estado son pronosticadas en conjunto con un VAR(1).

2/Corresponde al modelo afín con factores exógenos estimados mediante componentes principales (CP). Para todas las estimaciones se utilizaron las tasas de interés de bonos cupón cero con vencimientos de 1 a 60 meses. Cada variable de estado es pronosticada con un AR(1).

3/Las tasas forward fueron estimadas con datos observados de las tasas de interés de bonos cupón cero, mediante la fórmula:

$$f_t^{(i \text{ periodo} \rightarrow j \text{ periodo})} = \left[\frac{(1 + y_t^{(j \text{ periodo})})^j}{(1 + y_t^{(i \text{ periodo})})^i} \right]^{1/(j-i)} - 1, \text{ con } i < j \text{ los vencimientos de las tasas de interés } (y_t).$$

4/El pronóstico fuera de muestra de una trayectoria fija fue estimado mediante la relación $y_{t+h}^{(k)} = y_t^{(k)} + \varepsilon_{t+h}^{(k)}$ para todo h el horizonte de pronóstico y k el vencimiento de la tasa de interés a ser pronosticada.

5/Para la estimación y el pronóstico del VAR(1) se utilizaron las tasas de interés de bonos cupón cero con $Y_t = [y_t^{(k)}, y_t^{(3)}, y_t^{(30)}, y_t^{(120)}]$ donde k es el vencimiento de la tasa de interés a ser pronosticada, $k=1, 12$ y 24 meses con $y_t^{(1)}, y_t^{(3)}, y_t^{(90)}$ las tasas de interés con vencimientos de 3, 30 y 120 meses, respectivamente. Para el caso de la tasa de interés con vencimiento de 36 y 60 meses los VAR utilizados fueron $Y_t = [y_t^{(36)}, y_t^{(1)}, y_t^{(3)}, y_t^{(90)}]$ y $Y_t = [y_t^{(60)}, y_t^{(3)}, y_t^{(36)}, y_t^{(90)}]$, respectivamente. La ecuación que se considera para su estimación y pronóstico es $Y_t = \alpha_k + \beta_k Y_{t-1} + \varepsilon_t^{(k)}$, con $k=1, 12, 24, 36$ y 60 .

6/Es un modelo autorregresivo que considera el nivel de la tasa de interés observada. Las tasas de interés utilizadas fueron de 1, 12, 24, 36 y 60 meses de vencimiento. La ecuación que se considera en este modelo para la estimación y el pronóstico es $y_t^{(k)} = a_k + b_k y_{t-1}^{(k)} + e_t^{(k)}$ con $k=1, 12, 24, 36$, y 60 meses.

5.3 Comparación de Pronósticos Mediante la Prueba de Harvey, Leybourne y Newbold (1997)

Para reforzar los resultados antes descritos, en los Cuadros 5 y 6 se presenta una prueba estadística, en donde se compara si los pronósticos de los modelos afines son iguales que los pronósticos obtenidos de los otros 4 modelos considerados: las tasas forward, la trayectoria fija, el VAR(1) y el AR(1), todos ellos estimados con datos observados. Para ello, se utiliza el estadístico de prueba de Harvey, Leybourne y Newbold (1997), el cual es utilizado para probar específicamente la hipótesis nula de que los pronósticos obtenidos de dos modelos diferentes tienen el mismo error cuadrático medio (ECM). Los detalles de dicha prueba son mostrados en los Apéndices A y B de este documento.

En los Cuadros 5 y 6 se presentan los estadísticos de dicha prueba. El signo negativo señala que los ECM de los modelos competitivos son mayores que los ECM de los modelos afines. Por el contrario, un estadístico positivo representa mayores ECM para los modelos afines que para los modelos competitivos. Además, uno y dos asteriscos indican el rechazo de la hipótesis nula al 10% y 5% de significancia, respectivamente.

Cabe mencionar que los resultados encontrados con ambos modelos afines son muy similares. A continuación se destacan los resultados más relevantes.

De acuerdo a la prueba estadística, en promedio, se rechaza la hipótesis nula de que los ECMs de los pronósticos de los modelos afines y de las tasas forward son iguales (Columnas 2 y 2a de los Cuadros 5 y 6, respectivamente). Lo anterior refuerza los resultados antes encontrados (de los Cuadros 3 y 4) de que los RMSEs de los modelos afines son menores que los de las tasas forward para la mayoría de los vencimientos de las tasas de interés sobre los tres horizontes de pronóstico considerados.

Además, para un horizonte de pronóstico corto (12 meses, Panel A de los Cuadros 5 y 6), se tiene que en promedio, los ECMs de los pronósticos basados en los modelos afines son iguales que la trayectoria fija, el VAR(1) y el AR(1) estimados con datos observados (Columnas de la 3 a la 5 y de la 3a a la 5a de los Cuadros 5 y 6, respectivamente). Esto comprueba que los modelos afines en horizontes de pronóstico cortos son competitivos con respecto a los otros modelos considerados para pronosticar las tasas de interés nominal a diferentes vencimientos.

No obstante, en un horizonte de pronóstico más largo (24 meses, Panel C de los Cuadros 5 y 6), en promedio, se acepta la hipótesis nula de igualdad de pronósticos entre los modelos afines y los otros modelos considerados (la trayectoria fija, el VAR(1) y el AR(1) estimados con datos observados). Esto garantiza que en un horizonte de pronóstico más largo, los pronósticos (Panel C del Cuadro 5) obtenidos mediante los modelos afines son similares que los pronósticos basados en los modelos de referencia, con excepción del vencimiento de 60 meses, en cuyo caso se rechaza la hipótesis nula de igualdad de pronósticos a favor de los modelos afines (signo negativo representa mejores pronósticos para los modelos afines), lo que refuerza el hecho de que los modelos afines, en promedio, son mejores en pronosticar vencimientos de largo plazo.²⁹

Finalmente, por completitud en la columna 6a del Cuadro 6 se presenta la comparación de los ECMs de los pronósticos entre los dos modelos afines. Se puede mencionar que estadísticamente, los ECMs de los pronósticos de los dos modelos afines son diferentes en horizontes largos. Ello indica que los pronósticos de ambos modelos afines son similares en el corto y mediano plazo, mientras que, el modelo afín cuyas variables de estado son pronosticadas con un VAR(1), pronostica mejor para horizontes de largo plazo y vencimientos de 60 meses.

²⁹ Para el vencimiento de 60 meses en los horizontes de pronóstico de 12 y 18 meses, no se rechaza la hipótesis nula de igualdad de pronósticos en los modelos VAR(1) y trayectoria fija con respecto a los modelos afines. Sin embargo, para un horizonte de pronóstico de 24 meses siempre se rechaza la hipótesis nula de igualdad de pronósticos al menos al 10% de significancia, a favor de los modelos afines.

Cuadro 5. Comparación de pronósticos fuera de muestra basada en el estadístico de Harvey, Leybourne y Newbold (1997)

	1	2	3	4	5
Vencimiento en meses	CP+Afin Pronosticando las variables de estado con VAR(1) versus				
	Tasas Forward	Trayectoria Fija	VAR(1)	AR(1)	
Panel A: Predicción 12 meses hacia adelante					
1	-0.6198	0.5615	-1.4641	-0.2729	
12	-0.1051	1.1421	-0.5670	0.7835	
24	-2.8835**	4.2752**	-0.5250	1.9884*	
36	-3.3928**	1.6335	-1.5533	-0.4409	
60	-2.8442**	0.6719	-1.2755	-1.9342*	
Panel B: Predicción 18 meses hacia adelante					
1	-1.1700	0.9738	0.6839	0.4031	
12	-4.6834**	1.1475	1.1502	0.8808	
24	-10.6539**	2.0431*	-1.0532	1.4204	
36	-9.3928**	2.2833**	0.6174	0.9570	
60	-6.0807**	-1.7237*	-0.2474	-2.1751**	
Panel C: Predicción 24 meses hacia adelante					
1	-9.8992**	-0.4648	1.6978	-1.2025	
12	-10.2022**	-0.5880	-1.0342	-1.9382*	
24	-6.2326**	0.5574	-1.2017	-0.3187	
36	-5.6443**	1.0169	-1.1207	-0.0042	
60	-4.6351**	-2.2459**	-2.3567**	-2.4044**	

En la tabla se presenta el estadístico de Harvey, Leybourne y Newbold (1997), el cual compara si dos pronósticos son iguales o diferentes. En este caso, se comparan los pronósticos del modelo afin cuyas variables de estado son pronosticadas con un VAR(1) versus los pronósticos de los siguientes modelos: la tasa forward, la trayectoria fija, el VAR(1) y el AR(1) estimados con datos observados. En particular, la hipótesis nula a probar es que los pronósticos provenientes de dos modelos diferentes tienen el mismo error cuadrático medio (ECM) versus la hipótesis alternativa de que los pronósticos provenientes de dos modelos diferentes tienen distintos ECM. Lo que corresponde a una prueba de dos colas. Uno y dos asteriscos denotan el rechazo de la hipótesis nula a un nivel, α , de 10% y 5% de significancia respectivamente, es decir, la región crítica o de rechazo está dada por $R.C. = \{S_1 \mid |S_1| \geq Z_{\alpha/2}\}$ con S_1 es estadístico de prueba (número reportado en la tabla) y $Z_{0,05(23)} = 1.7139$ y $Z_{0,025(23)} = 2.069$ que corresponde a la probabilidad acumulada de una distribución *t*-Student, entre paréntesis se encuentran los grados de libertad.

Cuadro 6. Comparación de pronósticos fuera de muestra basada en el estadístico de Harvey, Leybourne y Newbold (1997)

1a	2a	3a	4a	5a	6a
Vencimiento en meses	CP+Afin Pronosticando cada variable de estado con AR(1) versus				
	Tasas Forward	Trayectoria Fija	VAR(1)	AR(1)	CP+Afin Pronosticando las variables de estado con VAR(1)^{1/}
Panel A: Predicción 12 meses hacia adelante					
1	-0.5910	2.8196**	-0.3713	0.1027	0.4598
12	-3.1192**	1.2880	-1.5301	0.2680	-0.9954
24	-4.0013**	4.1514**	-0.5884	2.8950**	-0.2233
36	-5.1359**	5.0796**	-1.8070*	-1.5515	-0.2795
60	-4.2141**	1.3686	-1.6359	-4.9260**	0.1642
Panel B: Predicción 18 meses hacia adelante					
1	-1.4322	3.2455**	0.7966	1.4155	0.4911
12	-10.1093**	0.6802	-0.7503	-0.2692	-1.2446
24	-6.6864**	3.6270**	-0.9969	2.5680**	-0.6163
36	-8.3916**	3.0103**	0.5380	0.9082	0.2778
60	-6.5776**	-0.5110	1.1062	-1.9728*	2.1545**
Panel C: Predicción 24 meses hacia adelante					
1	-8.3897**	1.8363*	4.9093**	0.9218	6.8034**
12	-9.1956**	0.6781	1.8557*	0.4349	3.5545**
24	-5.8701**	1.2904	-0.8819	1.0440	3.0858**
36	-5.6221**	1.4841	-1.0001	1.9867*	2.2094**
60	-4.6383**	-1.8060*	-2.2570**	-2.3875*	2.0602*

En la tabla se presenta el estadístico de Harvey, Leybourne y Newbold (1997), el cual compara si dos pronósticos son iguales o diferentes. En este caso, se comparan los pronósticos del modelo afin donde cada variable de estado es pronosticada con un AR(1) versus los pronósticos de los siguientes modelos: la tasa forward, la trayectoria fija, el VAR(1), el AR(1) y el modelo afin cuyas variables de estado son pronosticadas con un VAR(1). En particular, la hipótesis nula a probar es que los pronósticos provenientes de dos modelos diferentes tienen el mismo error cuadrático medio (ECM) versus la hipótesis alternativa de que los pronósticos provenientes de dos modelos diferentes tienen distintos ECM. Lo que corresponde a una prueba de dos colas. Uno y dos asteriscos denotan el rechazo de la hipótesis nula a un nivel, α , de 10% y 5% de significancia respectivamente, es decir, la región crítica o de rechazo está dada por $R.C. = \{S_1 \mid |S_1| \geq Z_{\alpha/2}\}$ con S_1 es estadístico de prueba (número reportado en la tabla) y $Z_{0.05(23)} = 1.7139$ y $Z_{0.025(23)} = 2.069$ que corresponde a la probabilidad acumulada de una distribución *t*-Student, entre paréntesis se encuentran los grados de libertad.

6. Conclusiones

Se mostró que utilizando un modelo afín con factores exógenos (estimados mediante la técnica de componentes principales), el cual incluye la condición de no arbitraje y aversión al riesgo, se proporciona un buen ajuste dentro de muestra de la estructura temporal de las tasas de interés en México, sobre todo para los vencimientos de corto y mediano plazo.

Además, el modelo afín propuesto ayuda a incrementar el desempeño de pronóstico de la estructura temporal de las tasas de interés en México fuera de muestra en horizontes de 24 meses, así como para vencimientos de largo plazo, es decir 60 meses. Sin embargo, para horizontes de corto y mediano plazo, el modelo afín es competitivo con los pronósticos de los otros tres modelos de referencia, los cuales son: el AR(1), el VAR(1) y la trayectoria fija (o caminata aleatoria), estimados con datos observados. Los modelos afines, en promedio, proporcionan mejores pronósticos que las tasas forward.

Asimismo, para reforzar los resultados encontrados con respecto a los pronósticos fuera de muestra, tanto del modelo afín como de los otros 4 modelos considerados, se presentó la prueba estadística de Harvey, Leybourne y Newbold (1997), la cual compara si los errores cuadráticos medios de los pronósticos provenientes de dos modelos diferentes son iguales.

Los modelos afines predicen mejor los vencimientos de largo plazo en horizontes largos debido a que éstos incluyen aversión al riesgo en la estimación de la estructura temporal de las tasas de interés, lo cual los hace más robustos en ambientes de inestabilidad de parámetros, no linealidades y no normalidad (ver Yu y Zivot (2011)).

Cabe destacar que otra ventaja del modelo afín con factores exógenos es que puede ser extendido de tal manera que se puedan incorporar factores macroeconómicos, lo cual podría ayudar a mejorar el pronóstico fuera de muestra. Esto se deja para trabajo futuro.

Referencias

Andrews D. W. K. (1991). "Heterokedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation," *Econometrica*, Vol. 59, No.3, pp. 817-858.

Ang A. y M. Piazzesi. (2003). "A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 50, pp. 745-787.

Christensen J. H, Diebold F. X y G. D. Rudebusch. (2007). "The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models," Federal Reserve Bank of San Francisco, Working Paper Series No. 2007-20.

Cortés J. F., Ramos-Francia M. y A. Torres. (2008). "Un Análisis Empírico de la Estructura Temporal de Tasas de Interés en México", Banco de México, Documento de Investigación No. 2008-07.

Cortés J. F. y M. Ramos-Francia. (2008). "Un Modelo Macroeconómico de la Estructura Temporal de Tasas de Interés en México", Banco de México, Documento de Investigación No. 2008-10.

Cox J. C., Ingersoll J. E. y S. A. Ross. (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, Vol. 53, pp. 385-407.

Dai Q. y K. J. Singleton. (2000). "Specification Analysis of Affine Term Structure Models," *Journal of Finance*, Vol. 55, pp. 1943-1978.

De Pooter M., Ravazzolo F. y D. van Dijk. (2010). "Term Structure Forecasting Using Macro Factors and Forecast Combination," Board of Governors of the Federal Reserve System, International Finance Discussion Papers No. 993.

Diebold F. X. y R. S. Mariano. (1995). "Comparing Predictive Accuracy," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 13, pp. 253-265.

Diebold F. X. y C. Li (2006). "Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields," *Journal of Econometrics*, Vol. 130, pp. 337-364.

Duffie D. y R. Kan. (1996). "A Yield-Factor Model of Interest Rates," *Mathematical Finance*, Vol. 6, pp. 379-406.

Favero C. A., Niu L. y L. Sala. (2007). "Term Structure Forecasting: No-Arbitrage Restrictions vs. Large Information Set," CEPR, International Macroeconomics Discussion Paper Series No. 6206.

García-Verdú S. (2011). "Algunas Consideraciones sobre la Estructura Temporal de Tasas de Interés del Gobierno en México", Banco de México, Documento de Investigación No. 2011-18.

Giacomini R. y H. White. (2006). "Test of Conditional Predictive Ability," *Econometrica*, Econometric Society, Vol. 74, Núm. 6, pp. 1545-1578.

Gimeno R. y J. M. Marques. (2008). "Uncertainty and the Price of Risk in a Nominal Convergence Process," Banco de España, Documento de Trabajo No. 0802.

Gimeno R. y J. M. Marques. (2009). "Extraction of Financial Market Expectations about Inflation and Interest Rates from Market," Banco de España, Documento de Trabajo No. 0906.

Harvey D, S. Leybourne y P. Newbold. (1997). "Testing the Equality of Prediction Mean Squared Errors," *International Journal of Forecasting*, Vol. 13, pp. 281-291.

Jolliffe I. T. (2002). "Principal Component Analysis," Springer Series in Statistics, 2da. Edición.

Mönch E. (2005). “Forecasting the Yield Curve in a Data-Rich Environment: A No-Arbitrage Factor-Augmented VAR Approach,” European Central Bank, Working Paper Series No. 544.

Nelson C. R. y A. F. Siegel. (1987). “Parsimonious Modeling of Yield Curve,” *Journal of Business*, Vol. 60, pp. 473-489.

Newey W. K. y K. D. West. (1987). “A Positive Semi-Definite, Heterokedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix,” *Econometrica*, Vol. 55, No. 3, pp. 703-708.

Sethi Rishab. (2008). “New Zealand Zero-Coupon Yield Curves: A Principal-Components Analysis”, Bank for International Settlements or the Reserve Bank of New Zealand.

Svensson L. E. O. (1994). “Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–1994,” IMF Working Paper No. 94/114.

Timmermann A. y M. Guidolin. (2005). “Forecast of US Short-term Interest Rates: A Flexible Forecast Combination Approach,” Federal Reserve Bank of ST. Louis, Working Paper Series No. 2005-059C.

Tipping M. E. y C. M. Bishop. (1999). “Probabilistic Principal Component Analysis,” *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 61, Núm. 3, pp. 611–622.

Vasicek O. A. (1977). “An Equilibrium Characterization of the Term Structure,” *Journal of Finance Economics*, Vol. 37, pp. 177-188.

Yu W. C. y E. W. Zivot. (2011). “Forecasting the Term Structures of Treasury and Corporate Yields using Dynamic Nelson-Siegel Models,” *International Journal of Forecasting*, Vol.27, No. 2, pp. 579-591.

Apéndice A. Prueba Estadística de Diebold y Mariano (1995)

La prueba estadística de Diebold y Mariano (1995) se basa en contrastar la hipótesis nula de igualdad de pronósticos generados con dos modelos diferentes. Para ello, a continuación se describe paso a paso la construcción de esta prueba:

1. Considérense dos pronósticos $\{\hat{y}_{1t}\}_{t=1}^T$ y $\{\hat{y}_{2t}\}_{t=1}^T$ de la serie de tiempo $\{y_t\}_{t=1}^T$. Sean los errores asociados a estos pronósticos $\{\hat{e}_{1t}\}_{t=1}^T$ y $\{\hat{e}_{2t}\}_{t=1}^T$. Además, se definen $g(y_t, \hat{y}_{it}) = g(e_{it})$ para $i=1,2$ funciones arbitrarias que proporcionan el error entre la realización y la predicción. En particular, la función $g(e_{it})$ considerada es la diferencia al cuadrado entre la realización y la predicción.
2. Se construye el diferencial de pérdida de los dos pronósticos mediante la relación $d_t \equiv [g(e_{1t}) - g(e_{2t})]$.
3. Dado este diferencial de pérdida se desea probar la hipótesis nula de que la población media del diferencial de pérdida es cero, es decir, $\bar{d} = 0$. Lo cual corresponde a probar que los errores cuadráticos medios (ECM) de los pronósticos de dos poblaciones son iguales. Para muestras grandes se tiene que $\bar{d} \sim N(\mu, \frac{2\pi f_d(0)}{T})$, con $f_d(0)$ la densidad espectral del diferencial de pérdida en la frecuencia cero.
4. Para probar la hipótesis nula de que los ECM de los pronósticos de dos modelos diferentes son iguales, el estadístico de prueba estará dado por:

$$S_1 = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{2\pi f_d(0)}{T}}} \sim N(0,1), \quad (\text{A.1})$$

con

$$\bar{d} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [g(e_{1t}) - g(e_{2t})].$$

Además, un estimador consistente de $2\pi f_d(0)$ es:

$$2\pi f_d(0) = \sum_{\tau=-(T-1)}^{(T-1)} 1\left(\frac{\tau}{S(T)}\right) \hat{\gamma}_d(\tau) \quad \text{y} \quad \hat{\gamma}_d(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=|\tau|+1}^T (d_t - \bar{d})(d_{t-|\tau|} - \bar{d}).$$

Al ponderador de la densidad espectral, $1\left(\frac{\tau}{S(T)}\right)$, se le conoce como la ventana rezagada y $S(T)$ es el rezago truncado. Para este caso, es particularmente importante imponer una restricción de no negatividad a la densidad espectral estimada. Para ello, se escoge la ventana rezagada de Bartlett (Andrews, 1991), la cual se define como:

$$1\left(\frac{\tau}{S(T)}\right) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{\tau}{S(T)}\right| & \text{para } \left|\frac{\tau}{S(T)}\right| \leq 1. \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

Considerando el hecho de que los errores de pronóstico h -pasos hacia delante son a los más $(h-1)$ -dependientes, se toma $S(T) = h - 1$.

5. Finalmente, para verificar si se acepta o rechaza la hipótesis nula, considerando que la hipótesis alternativa corresponde a que los errores cuadráticos medios de los dos pronósticos son diferentes. Lo que corresponde a una prueba de dos colas. Así, la región crítica o de rechazo a un nivel, α , de 5% de significancia estará dada por:

$$R. C. = \{S_1 \mid |S_1| \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}\} = \{S_1 \mid |S_1| \geq 1.96\},$$

con S_1 es estadístico de prueba y Z corresponde a la probabilidad acumulada de una distribución $N(0,1)$.

Apéndice B. Prueba Estadística de Harvey, Leybourne y Newbold (1997)

La prueba estadística de Harvey, Leybourne y Newbold (1997) se basa en contrastar la hipótesis nula de igualdad de pronósticos de los errores cuadráticos medios provenientes de dos modelos diferentes para muestras pequeñas.

Cabe destacar que la prueba de Diebold y Mariano (1995) puede presentar sobreidentificación en el caso de la predicción de dos pasos hacia adelante ($h=2$). Este problema se acentúa más si el horizonte de pronóstico se incrementa.

Así Harvey, Leybourne y Newbold proponen una modificación a la prueba de Diebold y Mariano que pondera por el horizonte de pronóstico y el tamaño de la muestra. Así el estadístico de prueba modificado queda como:

$$S_1^* = \left[\frac{n + 1 - 2h + n^{-1}h(h - 1)}{n} \right]^{1/2} S_1,$$

con S_1 la estadística original de Diebold y Mariano, ecuación (A.1), h el horizonte de pronóstico y n el tamaño de la muestra.

Otro cambio intuitivo que se hace con respecto al estadístico de Diebold y Mariano³⁰ es que en esta modificación, se compara el estadístico S_1^* con los valores críticos de una distribución *t-Student* con $(n-1)$ grados de libertad, en lugar de hacerlo con una distribución Normal.

³⁰ En la prueba de Diebold y Mariano (1995), se utiliza una distribución Normal estándar para contrastar la hipótesis nula, ver Apéndice A.