

**Banco de México**  
**Documentos de Investigación**

**Banco de México**  
**Working Papers**

**N° 2008-09**

**Un Modelo Afín de la Estructura Temporal de Tasas  
de Interés en México**

**Josué Fernando Cortés Espada**  
Banco de México

**Manuel Ramos-Francia**  
Banco de México

Julio 2008

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively the responsibility of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

# Un Modelo Afín de la Estructura Temporal de Tasas de Interés en México<sup>\*</sup>

Josué Fernando Cortés Espada<sup>†</sup>  
Banco de México

Manuel Ramos-Francia<sup>‡</sup>  
Banco de México

## Resumen

Se desarrolla y estima un modelo afín que caracteriza la dinámica de la estructura temporal de tasas de interés en México. Adicionalmente, se presenta evidencia empírica sobre la relación entre los factores del modelo afín y algunas variables macroeconómicas. Primero, se demuestra que el modelo se ajusta muy bien a los datos. Segundo, se demuestra que el primer factor captura movimientos en el nivel de la curva de rendimientos, mientras que el segundo captura movimientos en la pendiente. Tercero, los resultados de descomposición de la varianza muestran que el factor de nivel explica gran parte de la varianza en la parte larga de la curva en todos los horizontes. En horizontes de corto plazo, el factor de pendiente explica gran parte de la varianza en la parte corta de la curva. Finalmente, se muestra que los movimientos en el nivel de la curva de rendimientos están asociados a movimientos en las expectativas de inflación de largo plazo, mientras que los movimientos en la pendiente están asociados a movimientos en la tasa de interés de corto plazo.

**Palabras Clave:** No-Arbitraje, Factores Latentes, Estructura-Temporal.

## Abstract

We develop and estimate an affine model that characterizes the dynamics of the term structure of interest rates in Mexico. Moreover, we provide empirical evidence on the relationship between the term structure factors and macroeconomic variables. First, we show that the model fits the data remarkably well. Second, we show that the first factor captures movements in the level of the yield curve, while the second factor captures movements in the slope of the curve. Third, the variance decomposition results show that the level factor accounts for a substantial part of the variance at the long end of the yield curve at all horizons. At short horizons, the slope factor accounts for much of the variance at the short end of the yield curve. Finally, we show that movements in the level of the yield curve are associated with movements in long-term inflation expectations, while movements in the slope of the curve are associated with movements in the short-term nominal interest rate.

**Keywords:** No-Arbitrage, Latent Factors, Term-Structure.

**JEL Classification:** C13, E43, G12.

---

<sup>\*</sup>Los autores agradecen a Ana María Aguilar, Arturo Antón, Emilio Fernández-Corugedo y Alberto Torres por sus valiosos comentarios y sugerencias.

<sup>†</sup> Dirección General de Investigación Económica. Email: jfcortes@banxico.org.mx.

<sup>‡</sup> Dirección General de Investigación Económica. Email: mrfran@banxico.org.mx.

# 1. Introducción

Se desarrolla y estima un modelo afín que caracteriza la dinámica de la estructura temporal de tasas de interés en México. Adicionalmente, se presenta evidencia empírica sobre la relación entre los factores del modelo afín y algunas variables macroeconómicas. Debido a varias razones, el entendimiento de la estructura temporal de tasas de interés tiene un papel importante en el área de finanzas y macroeconomía. Para los economistas monetarios es importante saber cómo los cambios en la tasa de política de corto plazo afectan a los rendimientos de largo plazo, dado que representa una parte clave en el mecanismo de transmisión de la política monetaria afectando el comportamiento del gasto, del ahorro y de la inversión de los individuos y empresas de la economía. Además, se ha encontrado que la curva de rendimientos es una buena medida para pronosticar la actividad real futura y la inflación (véase Harvey, 1988; Mishkin, 1990; Estrella y Hardouvelis, 1991). La estructura temporal también incluye información sobre las tasas de interés futuras de corto plazo y las primas de riesgo. Los economistas monetarios se han enfocado en comprender la relación entre las tasas de interés, la política monetaria y las variables macroeconómicas. Típicamente, se utilizó la hipótesis de expectativas para describir la dinámica de los rendimientos de bonos, la cual supone que las primas de riesgo son constantes. Sin embargo, existe fuerte evidencia empírica que sugiere que las primas de riesgo cambian en el tiempo. Por otro lado, los economistas financieros principalmente se han enfocado en pronosticar y valorar los valores relacionados con las tasas de interés y han desarrollado modelos bajo el supuesto de no-arbitraje, pero no han especificado la relación entre la estructura temporal y otras variables económicas. La presente investigación ha encontrado que casi todos los movimientos en la curva de rendimientos se pueden capturar en un marco de no-arbitraje donde los rendimientos son funciones afines de algunos factores observables o latentes (por ejemplo, Duffie y Kan, 1996; Litterman y Scheinkman, 1991, y Dai y Singleton, 2000). Litterman y Scheinkman (1991) muestran que se requieren solamente tres factores para explicar casi toda la variación en los rendimientos de bonos de EE.UU. Dai y Singleton (2000) muestran que, al contrario de la hipótesis de expectativas, un modelo afín de la estructura temporal, bajo el supuesto de no-arbitraje e incluyendo tres factores, replica exitosamente las características de los datos.

En la Sección 2 del presente trabajo, se introduce el modelo afín de no-arbitraje de la estructura temporal de las tasas de interés. Este modelo con dos factores latentes muestra que dos factores explican gran parte de la variación de la curva de rendimientos en México. En la Sección 3 se describe el método de estimación y la Sección 4 presenta los resultados. Primero, se demuestra que el modelo se ajusta muy bien a los datos. Segundo, se demuestra que el primer factor captura movimientos en el nivel de la curva de rendimientos, mientras

que el segundo factor captura movimientos en la pendiente. Si un choque positivo afecta al primer factor latente, los rendimientos de todos los vencimientos aumentan por una magnitud similar y la curva de rendimientos se desplaza paralelamente, así que dicho factor se denomina el factor de nivel. Si un choque positivo afecta al segundo factor latente, los rendimientos de corto plazo aumentan mucho más que los rendimientos de largo plazo y la curva de rendimientos se aplana, así que dicho factor es el factor de pendiente. Tercero, los resultados de descomposición de la varianza muestran que el factor de nivel explica gran parte de la varianza en la parte larga de la curva en todos los horizontes, y en la parte corta y media en los horizontes de mediano y largo plazo. En horizontes de corto plazo, el factor de pendiente explica gran parte de la varianza en la parte corta de la curva. Finalmente, se muestra que los movimientos en el nivel de la curva de rendimientos están asociados a movimientos en las expectativas de inflación de largo plazo, mientras que los movimientos en la pendiente están asociados a movimientos en la tasa de interés de corto plazo. La Sección 5 presenta las conclusiones.

## 2. Un modelo de la estructura temporal con factores latentes

Para desarrollar un modelo base de la curva de rendimientos en México, se estima un modelo afín de no-arbitraje de la estructura temporal utilizando los rendimientos de bonos cupón-cero. La estructura temporal de las tasas de interés se puede caracterizar por los modelos afines de no-arbitraje de estructura temporal.<sup>1</sup> Dichos modelos incluyen una condición de no-arbitraje que vincula los rendimientos de todos vencimientos de la estructura temporal. Por lo tanto, se mejora la eficiencia de estimación y permite estimar la curva de rendimientos entera como función de pocas variables de estado. Los modelos afines de la estructura temporal se forman bajo el supuesto de no-arbitraje y, por lo tanto, tienen un contenido económico explícito que restringe la sección cruzada y el comportamiento de las series de tiempo de precios de bonos y de tasas de interés. Los modelos de Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985) son pioneros dentro de la clase de modelos afines de la estructura temporal. En la versión más simplificada, i.e., el modelo con un factor, la tasa de interés de corto plazo es el único factor que determina los movimientos de la estructura temporal.

Sin embargo, los modelos con un factor contienen algunas características no deseables. Primero, no pueden generar todas las formas de la curva de rendimientos observadas en la práctica. Segundo, permiten únicamente desplazamientos paralelos de la curva, es decir, no

---

<sup>1</sup> Piazzesi (2003) presenta un excelente resumen de dichos modelos.

permiten los cambios en la curva de rendimientos donde los rendimientos al vencimiento de corto plazo se muevan en dirección contraria a los rendimientos al vencimiento de largo plazo. Lo anterior, se explica por la alta correlación entre los rendimientos, ya que se determinan por solamente un factor. En contraste, los modelos con múltiples factores son más flexibles y pueden generar una dinámica y formas adicionales de la curva de rendimientos. Varios factores de riesgo, observables o no-observables, determinan la dinámica de estructura temporal.

El modelo afín estándar de no-arbitraje de estructura temporal contiene tres ecuaciones básicas. Primero, la ecuación de transición para el vector de estado que es relevante para la valuación de bonos. En el presente estudio, el vector de estado se forma con dos factores latentes  $X_t = (X_{1t}, X_{2t})'$ , suponiendo que dichos dos factores pueden explicar la mayor parte de la variación en la curva de rendimientos en México durante el período de muestra en estudio. En particular, se realizó un análisis de componentes principales para identificar los factores comunes que determinan la dinámica de la estructura temporal de tasas de interés en México.<sup>2</sup> Se encuentra que el primer componente principal explica 79 por ciento de la variación de los rendimientos y que el primer y segundo componente en conjunto explican el 95 por ciento de dicha variación, lo que demuestra que sólo dos componentes pueden explicar casi todos los movimientos en la curva de rendimientos. Se supone que los factores latentes siguen un proceso VAR(1):

$$X_t = \Phi X_{t-1} + \Sigma \varepsilon_t \quad (1)$$

donde  $\varepsilon_t$  son los choques a los factores no observables. Se supone que los choques son independientes e idénticamente distribuidos con una distribución  $N(0, I_2)$ , que  $\Sigma$  es diagonal, y que  $\Phi$  es una matriz triangular inferior de orden  $2 \times 2$ . La segunda ecuación define que la tasa de interés de corto plazo de un período es una función afín de las variables de estado:

$$i_t = \delta_0 + \delta_1' X_t \quad (2)$$

Dado que se usan datos mensuales, se aplica el rendimiento de un mes  $y_t^1$  como tasa de interés de corto plazo  $i_t$ . Se supone que no existen oportunidades de arbitraje en el mercado de bonos, implicando que un factor de descuento estocástico positivo o un kernel de precios determina los valores de todos los instrumentos de renta fija. El resultado principal de la valuación contemporánea de activos explica que en un ambiente de no-arbitraje existe un factor de descuento estocástico positivo  $M$  que determina el precio de cualquier activo financiero en el tiempo  $t$  generando flujos de efectivo nominales  $P$  como el pago futuro

---

<sup>2</sup> Cortés, Ramos-Francia y Torres (2008) también encuentran que dos factores explican 95 por ciento de la variación en la curva de rendimientos.

descontado. Específicamente, el valor de un activo en el tiempo  $t$  es igual a  $E_t [M_{t+1}D_{t+1}]$ , donde  $M_{t+1}$  es el factor de descuento estocástico y  $D_{t+1}$  es el valor del activo en  $t + 1$  incluyendo cualquier dividendo o cupón pagado por el activo. Dado que se consideran bonos cupón-cero, el pago de los bonos es simplemente su valor en el próximo período, así que la siguiente relación recursiva cumple:

$$P_t^n = E_t [M_{t+1}P_{t+1}^{n-1}] \quad (3)$$

donde  $P_t^n$  representa el precio de un bono cupón-cero de  $n$ -períodos y el valor terminal del bono  $P_{t+n}^0$  está normalizado a 1.

$M$  también se denomina como el kernel de precios, dado que es la variable que determina  $P$ . Resolviendo la ecuación de valuación (3) mediante la ley de expectativas iteradas y considerando que el bono paga exactamente una unidad monetaria al vencimiento ( $P_{t+n}^0 = 1$ ) resulta:

$$P_t^n = E_t [M_{t+1} \dots M_{t+n}] = E_t \left[ \prod_{i=1}^n M_{t+i} \right] \quad (4)$$

así que un modelo de precios de bonos también se podría expresar como un modelo de la evolución de kernel de precios. A continuación se puede modelar  $P_t^n$  mediante la modelación del proceso estocástico de  $M_{t+i}$ . Los precios de los bonos son una función de dichas variables de estado relevantes para pronosticar el proceso del kernel de precios. Los modelos de no-arbitraje son modelos de equilibrio, es decir, se determinan solamente los precios de equilibrio de los activos financieros. Un mercado que permite el arbitraje no se encuentra en el estado de equilibrio. Por lo tanto, se pueden aprovechar las condiciones de no-arbitraje cuando los modelos se resuelven para los precios de equilibrio.

Además, se puede aplicar la ecuación de valuación (3) para caracterizar la compensación por el riesgo que exige el inversionista para mantener un bono riesgoso. Si se denomina el rendimiento nominal bruto de un activo ( $P_{t+1}^{n-1}/P_t^n$ ) como  $(1 + i_{t+1}^r)$ , la ecuación (3) se presenta de la siguiente manera:

$$1 = E_t [M_{t+1} (1 + i_{t+1}^r)] = E_t [M_{t+1}]E_t[(1 + i_{t+1}^r)] + Cov_t [i_{t+1}^r, M_{t+1}] \quad (5)$$

Resulta que:

$$E_t [(1 + i_{t+1}^r)] = \frac{1}{E_t [M_{t+1}]} (1 - Cov_t [i_{t+1}^r, M_{t+1}]) \quad (6)$$

Dado que un activo libre de riesgo requiere que el término de covarianza sea cero, su tasa de rendimiento tiene que satisfacer:<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> La tasa libre de riesgo muchas veces se refiere a la tasa de interés de corto plazo.

$$1 + i_t = \frac{1}{E_t [M_{t+1}]} \quad (7)$$

Por lo tanto, el rendimiento en exceso de cualquier activo en comparación con un activo libre de riesgo, medido como la diferencia entre (6) y (7), es:

$$E_t [i_{t+1}^r] - i_t = -(1 + i_t) Cov_t [i_{t+1}, M_{t+1}] \quad (8)$$

La ecuación (8) ilustra un resultado básico de la teoría de finanzas: el rendimiento en exceso de cualquier activo en comparación con un activo libre de riesgo depende de la covarianza entre su tasa de rendimiento y el kernel de precios. Un activo cuyo pago tiene una correlación negativa con el kernel de precios paga una prima de riesgo. En modelos de equilibrio, basados en el consumo, el kernel de precios es igual a la utilidad marginal del consumo. Si el crecimiento del consumo es alto, la utilidad marginal del consumo es baja. Por lo tanto, si los rendimientos tienen una correlación negativa con el kernel de precios, los bajos rendimientos se relacionan con tiempos de bajo consumo. Teniéndose así que pagar una prima de riesgo para que los inversionistas mantengan dichos activos, dado que no generan rendimientos cuando es más valioso para el inversionista.

Siguiendo Ang y Piazzesi (2003), se supone que el kernel de precios es condicionalmente log-normal:

$$M_{t+1} = \exp \left( -i_t - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \varepsilon_{t+1} \right) \quad (9)$$

donde  $\lambda_t$  son los precios de riesgo de mercado asociados con las innovaciones de las variables de estado. Adicionalmente, en los modelos afines de la estructura temporal se supone que los precios de riesgo son funciones afines de las variables de estado. Bajo este supuesto, se puede valorar la curva de rendimientos completa mediante los factores estimados.

$$\lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1 X_t \quad (10)$$

Las ecuaciones (9) y (10) relacionan los choques en las variables de estado subyacentes con el kernel de precios y así determinan cómo los choques a los factores afectan todos los rendimientos. Este modelo pertenece al grupo afín de modelos de estructura temporal (Brown y Schaefer, 1994; Duffie y Kan, 1996). La especificación afín de precios de riesgos en la ecuación (10) se utilizó, entre otros, por Constantinides (1992), Fisher (1998), Duffie (2002) y Dai y Singleton (2002) en tiempo continuo, y por Ang y Piazzesi (2003), Ang, Piazzesi y Wei (2005) y Dai y Philippon (2005) en tiempo discreto. Como lo muestran Dai y Singleton (2002), dicha especificación flexible permite capturar el comportamiento de los rendimientos en exceso que se observa en los datos.

La ecuación (9) describe un kernel de precios nominales que valúa todos los activos nominales en la economía. Así que el proceso de rendimiento total bruto  $R_{t+1}$  de cualquier activo nominal cumple:

$$E_t [M_{t+1}R_{t+1}] = 1$$

La dinámica de estado de  $X_t$  (ecuación 1), la dinámica de la tasa de interés de corto plazo  $i_t$  (ecuación 2) junto con el kernel de precios (ecuación 9) y los precios de riesgo de mercado (ecuación 10) forman un modelo gaussiano con dos factores y en tiempo discreto. Dado que dicho modelo pertenece al grupo de modelos afines de la estructura temporal, se puede mostrar que los precios de bonos son funciones afines exponenciales de las variables de estado. Más precisamente, los precios de bonos se presentan de la siguiente manera:

$$P_t^n = \exp\left(\bar{A}_n + \bar{B}'_n X_t\right) \quad (11)$$

donde los coeficientes  $\bar{A}_n$  y  $\bar{B}_n$  siguen las ecuaciones en diferencias:

$$\bar{A}_{n+1} = \bar{A}_n - \bar{B}'_n \Sigma \lambda_0 + \frac{1}{2} \bar{B}'_n \Sigma \Sigma' \bar{B}_n + \bar{A}_1 \quad (12)$$

$$\bar{B}'_{n+1} = \bar{B}'_n (\Phi - \Sigma \lambda_1) + \bar{B}_1 \quad (13)$$

$n=1,2,\dots,N$ , con  $\bar{A}_1 = -\delta_0$  y  $\bar{B}_1 = -\delta_1$ . Estas ecuaciones en diferencias se pueden derivar por inducción utilizando la ecuación (3). El rendimiento compuesto continuamente  $y_t^n$  de un bono cupón-cero de n-períodos se representa por:

$$y_t^n = -\frac{p_t^n}{n} = A_n + B'_n X_t \quad (14)$$

donde  $p_t^n = \log P_t^n$ ,  $A_n = -\frac{\bar{A}_n}{n}$ , y  $B_n = -\frac{\bar{B}_n}{n}$ . Los rendimientos son funciones afines de estado, así que la ecuación (14) se puede interpretar como una ecuación de variables observables de un sistema estado-espacio.

$Y_t$  representa el vector que contiene los rendimientos de bonos cupón-cero. Entonces,

$$Y_t = A_y + B_y X_t \quad (15)$$

Los rendimientos de un bono cupón-cero de n-períodos para el período  $\tau$  (período de mantener el bono), en exceso de rendimiento de un bono cupón-cero en el período  $\tau$  se describe de la siguiente manera:

$$r x_{t+\tau}^n = p_{t+\tau}^{n-\tau} - p_t^n - \tau y_t^T = \bar{A}_{n-\tau} + \bar{B}'_{n-\tau} X_{t+\tau} + \bar{A}_\tau + \bar{B}'_\tau X_t - \bar{A}_n - \bar{B}'_n X_t$$

así que el rendimiento en exceso esperado es:

$$E_t (rx_{t+\tau}^n) = A_n^{\tau x} + B_n^{\tau x} X_t \quad (16)$$

donde  $A_n^{\tau x} = \bar{A}_{n-\tau} + \bar{A}_\tau - \bar{A}_n$ , y  $B_n^{\tau x} = \bar{B}'_{n-\tau} \Phi^\tau + \bar{B}'_\tau - \bar{B}'_n$ . Utilizando las ecuaciones recursivas para  $\bar{B}'_n$ , los coeficientes de la pendiente se pueden calcular explícitamente y se representan por:

$$B_n^{\tau x} = \bar{B}'_{n-\tau} [\Phi^\tau - (\Phi - \Sigma \lambda_1)^\tau] \quad (17)$$

En consecuencia, el rendimiento en exceso esperado de un período se calcula mediante:

$$E_t (rx_{t+\tau}^n) = A_n^x + B_n^x X_t \quad (18)$$

donde  $A_n^x = \bar{B}'_{n-1} \Sigma \lambda_0 - \frac{1}{2} \bar{B}'_{n-1} \Sigma \Sigma' \bar{B}_{n-1}$ , y  $B_n^x = \bar{B}'_{n-1} \Sigma \lambda_1$ .

Como muestra la ecuación (18), el rendimiento en exceso esperado comprende tres partes: (i) un término de desigualdad de Jensen  $-\frac{1}{2} \bar{B}'_{n-1} \Sigma \Sigma' \bar{B}_{n-1}$ , (ii) una prima de riesgo constante  $\bar{B}'_{n-1} \Sigma \lambda_0$ , y (iii) una prima de riesgo que cambia en el tiempo  $\bar{B}'_{n-1} \Sigma \lambda_1$ . La variación en el tiempo se determina por los parámetros en la matriz  $\lambda_1$ . Dicha relación básicamente explica que el logaritmo del rendimiento en exceso esperado es la suma de dos términos de prima de riesgo y el término de desigualdad de Jensen. La prima de riesgo se determina por el vector  $\lambda$ . Un signo negativo causa una prima de riesgo de bonos positiva. Eso se explica de la siguiente manera: considerando un choque positivo  $\varepsilon_{t+1}$  que aumenta una variable de estado, en concordancia con (11), (12) y (13), todos los precios de bonos disminuyen y por lo tanto, también los rendimientos de bonos. Si  $\lambda$  es positivo, el choque también reduce el log-valor del kernel de precio (9), que significa que los rendimientos de bonos tienen una correlación positiva con el kernel de precios. Como se mencionó anteriormente, dicha correlación tiene un valor de cobertura, así que las primas de riesgo de bonos son negativas. De la misma manera se explica el caso cuando  $\lambda$  es negativo y causa primas de riesgo positivas.

Dado que los rendimientos de bonos y los rendimientos esperados de bonos por mantenerlos en un período antes de vencimiento son funciones afines de  $X_t$ , fácilmente se pueden computar las descomposiciones de varianza utilizando los métodos estándar. La dinámica de la estructura temporal depende de los parámetros  $\lambda_0$  y  $\lambda_1$  de las primas de riesgo. Un vector distinto a cero  $\lambda_0$  afecta la media de rendimientos en largo plazo, dado que dichos parámetros afectan el término constante en la ecuación de rendimientos (14). Una matriz distinta a cero  $\lambda_1$  afecta la variación en el tiempo de las primas de riesgo, dado que afecta los coeficientes de la pendiente en la ecuación de rendimientos (14). Un modelo con  $\lambda_0$  distinto a cero y una matriz cero  $\lambda_1$ , permite una pendiente positiva de la curva de rendimiento promedio, pero no permite que las primas de riesgo cambien en el tiempo.

Si los inversionistas son neutrales al riesgo,  $\lambda_0 = 0$  y  $\lambda_1 = 0$ , lo que normalmente se denomina la Hipótesis de Expectativas. Los modelos macro, como el de Fuhrer y Moore (1995), utilizan dicha hipótesis para inferir la dinámica de rendimientos en largo plazo de las tasas de corto plazo.

Por lo general, los rendimientos de bonos cupón-cero se determinan por dos componentes: (1) el desarrollo esperado en el futuro de las tasas de interés de un período y (2) los rendimientos en exceso que los inversionistas requieren para compensar el riesgo de mantener instrumentos en largo plazo.

### 3. Método de Estimación

Dado un conjunto de rendimientos observados, se calcula la función de verosimilitud del presente modelo, y se estima a través de la máxima verosimilitud. Los rendimientos son funciones analíticas de las variables de estado  $X_t$ , que permiten inferir los factores no observables de los rendimientos. Con base en Chen y Scott (1993), se supone que se calcula sin error tanto el mismo número de rendimientos como de factores no observables existentes, y que los demás rendimientos se miden con error. Para estimar este modelo se utilizan los datos de cinco rendimientos de cupón-cero con tiempo al vencimiento de 1, 12, 36, 60 y 120 meses para el período de enero de 2001 a junio de 2007. Ya que existen dos factores latentes y cinco rendimientos observables, se supone que los rendimientos al vencimiento de 12, 36 y 60 meses se calculan con errores, según Ang y Piazzesi (2003).

#### 3.1. Representación de Innovaciones

La construcción de una representación de innovaciones es un paso clave para evaluar la función de verosimilitud. La forma de estado-espacio del modelo es la siguiente:

$$\tilde{X}_{t+1} = A\tilde{X}_t + B\varepsilon_{t+1} \quad (19)$$

$$Y_t = C\tilde{X}_t + w_t \quad (20)$$

$$w_t = Dw_{t-1} + \eta_t \quad (21)$$

donde  $\tilde{X}_t = [X_{1t}, X_{2t}, 1]'$ ,  $Y_t = [y_t^1, y_t^{12}, y_t^{36}, y_t^{60}, y_t^{120}]'$ , y

$$A = \begin{bmatrix} \Phi & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0_{1 \times 2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} B'_1 & A_1 \\ B'_{12} & A_{12} \\ B'_{36} & A_{36} \\ B'_{60} & A_{60} \\ B'_{120} & A_{120} \end{bmatrix}$$

Los elementos de  $D$  son los parámetros que determinan la correlación serial del error de medición. Se supone que  $E_t \eta_t \eta'_t = R$ , y  $E_t \epsilon_t \eta'_s = 0$  para todos períodos  $t$  y  $s$ . El proceso cuasi-diferenciado se define como:

$$\bar{Y}_t = Y_{t+1} - DY_t \quad (22)$$

Entonces, el sistema se puede presentar de la siguiente manera:

$$\tilde{X}_{t+1} = A\tilde{X}_t + B\varepsilon_{t+1} \quad (23)$$

$$\bar{Y}_t = \bar{C}\tilde{X}_t + CB\varepsilon_{t+1} + \eta_{t+1} \quad (24)$$

donde  $\bar{C} = CA - DC$ . El vector de innovación  $u_t$  y su covarianza  $\Omega_t$  se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_t &= \bar{Y}_t - E \left[ \bar{Y}_t \mid \bar{Y}_{t-1}, \bar{Y}_{t-2}, \dots, \bar{Y}_0, \hat{X}_0 \right] = Y_{t+1} - E \left[ Y_{t+1} \mid Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_0, \hat{X}_0 \right] \\ &= Y_{t+1} - DY_t - \bar{C}\hat{X}_t \end{aligned}$$

que depende del estado pronosticado  $\hat{X}_t$ :

$$\hat{X}_t = E \left[ \tilde{X}_t \mid Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_0, \hat{X}_0 \right]$$

$$\Omega_t = E u_t u'_t = \bar{C} \Sigma_t \bar{C}' + R + C B B' C'$$

El estado pronosticado resulta de acuerdo con:

$$\hat{X}_{t+1} = A\hat{X}_t + K_t u_t$$

donde  $K_t$ , y  $\Sigma_t$  son la ganancia de Kalman y la covarianza de estado asociadas con el

filtro de Kalman, respectivamente:

$$\begin{aligned} K_t &= (BB'C' + A\Sigma_t\bar{C}')\Omega_t^{-1} \\ \Sigma_{t+1} &= A\Sigma_tA' + BB' - (BB'C' + A\Sigma_t\bar{C}')\Omega_t^{-1}(\bar{C}\Sigma_tA' + CBB') \end{aligned}$$

Una representación de innovaciones para el sistema es:

$$\hat{X}_{t+1} = A\hat{X}_t + K_t u_t \quad (25)$$

$$\bar{Y}_t = \bar{C}\hat{X}_t + u_t \quad (26)$$

Las condiciones iniciales para el sistema son  $\hat{X}_0$  y  $\Sigma_0$ . Dicha representación de innovaciones se puede utilizar recursivamente para calcular las series de innovaciones y posteriormente la función de log-verosimilitud.

$$\ln L(\Theta) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |\Omega_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T-1} u_t' \Omega_t^{-1} u_t$$

donde el vector  $\Theta$  incluye los parámetros a estimar. El vector de innovación es  $u_t$  y su matriz de covarianza es  $\Omega_t$ . Los parámetros a estimar son los elementos de  $\Phi$ ,  $\Sigma$ ,  $\delta_0$ ,  $\delta_1$ ,  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ , y  $R$ .

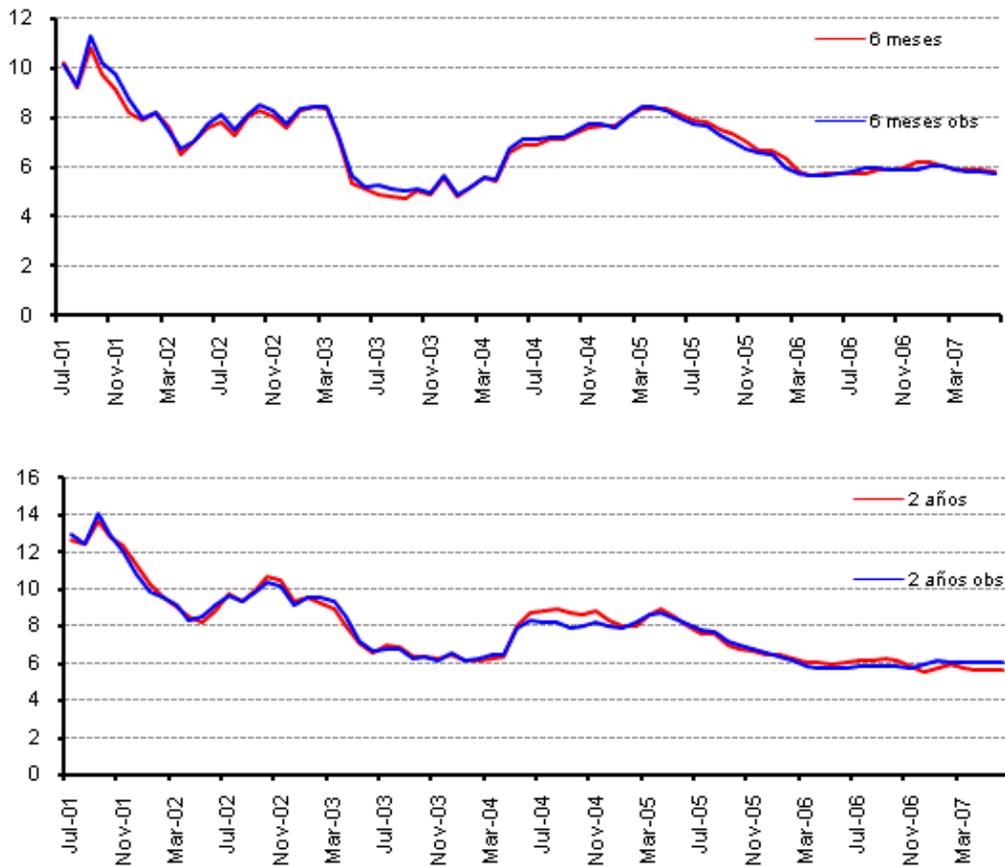
## 4. Resultados

Modelos relacionados, como los de Ang y Piazzesi (2003) y Rudebusch y Wu (2005), explican algunas características importantes de la estructura temporal de las tasas de interés en EE.UU. utilizando factores latentes. Adicionalmente, dichos modelos han encontrado que solamente algunos factores latentes determinan la mayor parte de la dinámica de la curva de rendimientos en EE.UU. Antes de examinar las características dinámicas del modelo, se debería analizar si el modelo se ajusta a los datos. Las Figuras 1 y 2 comparan las series de tiempo ajustadas y actuales para los rendimientos de 6 meses, 2 años, 3 años y 7 años. Las figuras muestran que el modelo replica bastante bien los rendimientos de bonos cupón-cero.

El Cuadro 1 reporta los parámetros estimados del modelo. Como se encuentra típicamente en las estimaciones empíricas, los factores latentes se diferencian por las características de series de tiempo como muestra  $\Phi$  estimado. El primer factor latente es muy persistente, mientras que el segundo es estacionario, o sea, regresa a la media. También existe una correlación cruzada baja, pero significativa, entre los factores. Los precios de riesgo  $\lambda_0$  y  $\lambda_1$ , también aparecen significativos. Si  $\lambda_0$  exhibe parámetros negativos, los

rendimientos de largo plazo son en promedio mayores que los rendimientos de corto plazo.  $\lambda_1$  determina la variación en el tiempo en las primas de riesgo. Por lo tanto, valores negativos en  $\lambda_1$  provocan un aumento de los rendimientos de largo plazo en relación con los rendimientos en corto plazo como respuesta a choques positivos a las variables de estado.

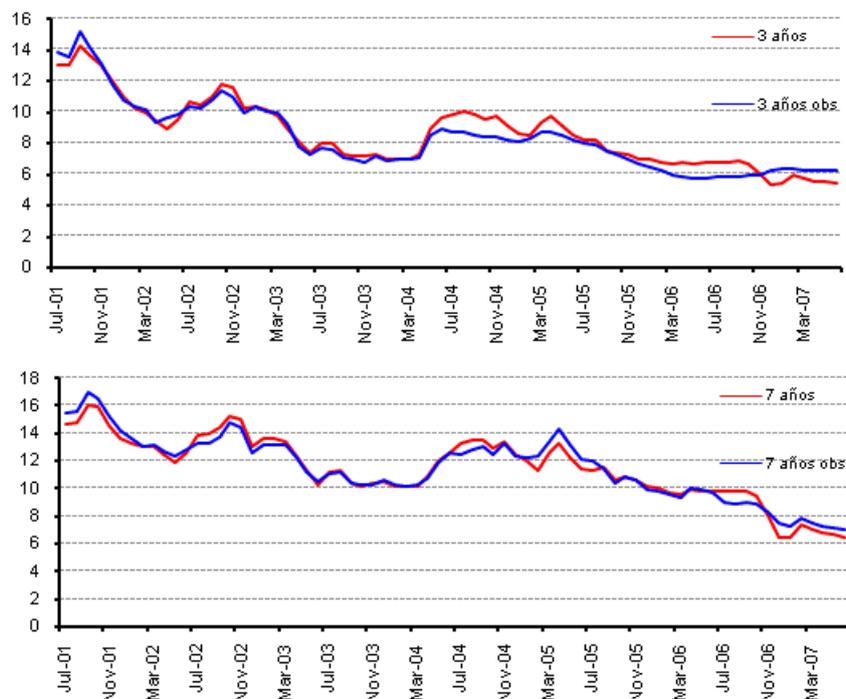
Figura 1.



Cuadro 1. Parámetros Estimados con Errores Estándar

$\Phi_{11}$	$\Phi_{21}$	$\Phi_{22}$	$\delta_0$	$\Sigma_{11}$	$\Sigma_{22}$
0,992 (0,00014)	0,053 (0,0013)	0,828 (0,0039)	6,61 (0,02)	0,271 (0,0098)	0,443 (0,0077)
$\lambda_{0,1}$	$\lambda_{0,2}$	$\lambda_{1,11}$	$\lambda_{1,21}$	$\lambda_{1,12}$	$\lambda_{1,22}$
-6 (0,04)	-0,04 (0,0011)	-0,02 (0,0013)	-0,04 (0,0014)	-0,06 (0,0016)	-0,09 (0,0008)

Figura 2.



Según la ecuación (13), las ponderaciones  $B_n$ , también denominadas coeficientes de factores y asignadas por el modelo de estructura temporal a cada rendimiento con el tiempo al vencimiento  $n$ , determinan el efecto de cada factor en la curva de rendimientos. Dichos coeficientes muestran la respuesta inicial de los rendimientos con distintas fechas de vencimiento a un incremento de una desviación estándar en cada factor. La Figura 4 ilustra dichas ponderaciones como función del tiempo al vencimiento de los rendimientos. Un choque positivo al primer factor latente aumenta los rendimientos de todos los vencimientos por una magnitud similar y la curva de rendimientos se desplaza paralela. Por lo tanto, dicho factor se denomina el factor de nivel. Un choque positivo al segundo factor latente causa un mayor aumento en los rendimientos de corto plazo en comparación con los rendimientos de largo plazo, así que la curva de rendimientos se aplana. Dicho factor se denomina el factor de pendiente.

La denominación de dos factores latentes como “nivel” y “pendiente” se basa en el estudio de Litterman y Scheinkman (1991), debido a los efectos de los factores en la curva de rendimientos. La Figura 4 muestra el primer factor latente y una transformación de “nivel” de la curva de rendimientos. El nivel se calcula como el promedio simple de los rendimientos de 1 mes, 1 año y 10 años  $(y_t^1 + y_t^{12} + y_t^{120}) / 3$ . El coeficiente de la correlación entre el primer factor y la transformación del nivel es 92.5 por ciento. La Figura 4 también muestra el se-

Figura 3.

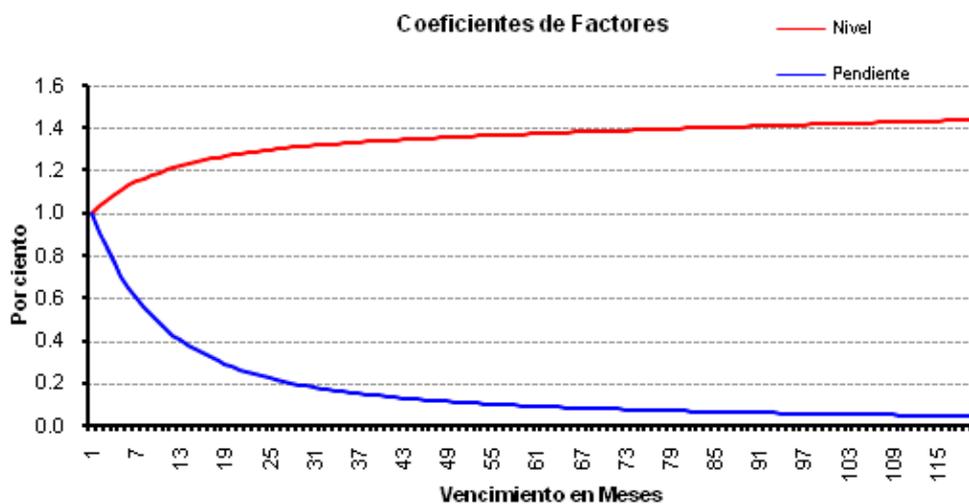


Figura 4.

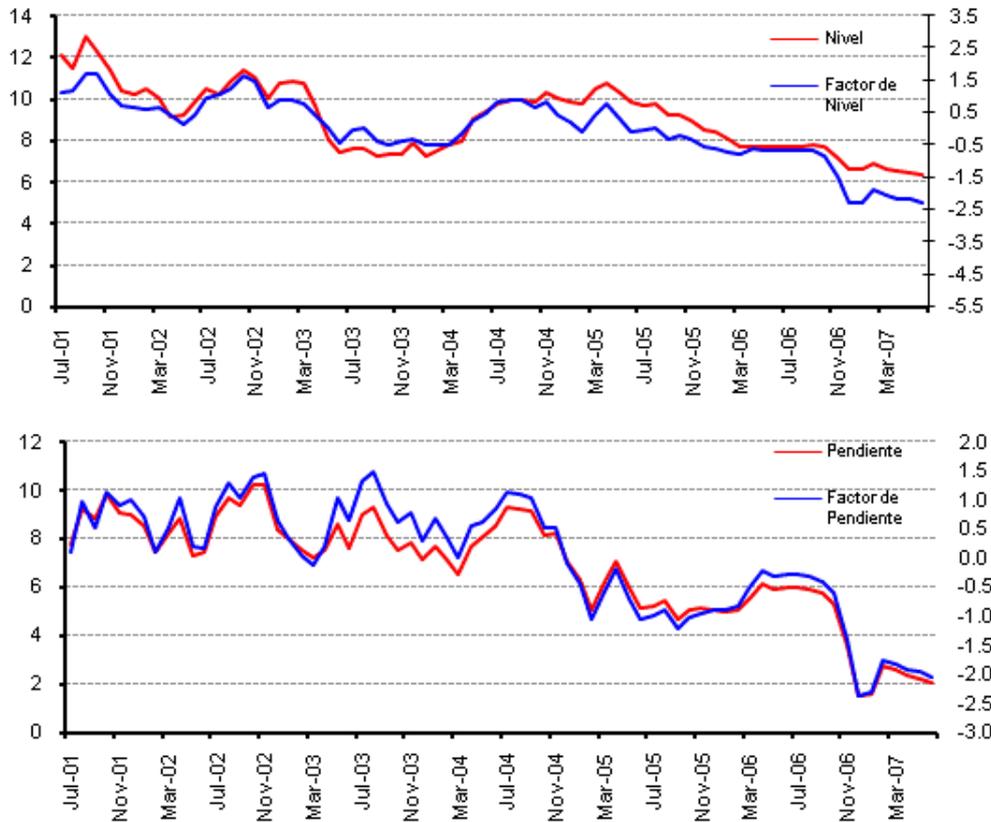
gundo factor latente y la pendiente de la curva de rendimientos, definida como la diferencia entre los rendimientos de 1 mes y los de 10 años ( $y_t^{120} - y_t^1$ ), el coeficiente de correlación entre el segundo factor latente y la pendiente de la curva de rendimientos es 98.5 por ciento.

Para determinar la contribución relativa de los factores latentes en el pronóstico de las varianzas, se construyen descomposiciones de la varianza, las cuales representan la contribución de cada factor a la varianza del pronóstico. El Cuadro 2 reporta la descomposición de la varianza para los rendimientos de 1 mes, 12 meses, 3 años, 5 años y 10 años en diferentes horizontes de pronóstico. Una parte sustancial de la varianza en la parte larga de la curva de rendimientos en todos los horizontes y en la parte corta y media de la curva de rendimientos en los horizontes de mediano y largo plazo se explica por el factor de nivel. En horizontes de corto plazo, el factor de pendiente explica la mayor parte de la varianza en la parte corta de la curva de rendimientos. El factor de nivel domina la descomposición de varianza en los horizontes largos a través de la curva de rendimientos.

Cuadro 2. Descomposición de Varianza

<b>Horizonte de Pronóstico</b>	<b>Nivel</b>	<b>Pendiente</b>
<b>Rendimiento de 1 mes</b>		
1 mes	10.92	89.08
12 meses	49.70	50.30
36 meses	89.73	10.27
60 meses	96.29	3.71
120 meses	99.15	0.85
<b>Rendimiento de 12 meses</b>		
1 mes	13.47	86.53
12 meses	56.64	45.36
36 meses	91.30	8.70
60 meses	96.88	3.12
120 meses	99.28	0.72
<b>Rendimiento de 36 meses</b>		
1 mes	70.70	29.30
12 meses	93.33	6.67
36 meses	99.09	0.91
60 meses	99.68	0.32
120 meses	99.93	0.07
<b>Rendimiento de 60 meses</b>		
1 mes	80.56	19.44
12 meses	95.94	4.06
36 meses	99.45	0.55
60 meses	99.81	0.19
120 meses	99.93	0.04
<b>Rendimiento de 120 meses</b>		
1 mes	89.41	40.59
12 meses	97.93	2.07
36 meses	99.72	0.28
60 meses	99.90	0.10
120 meses	99.98	0.02

Figura 4.



El coeficiente de la correlación entre el primer factor y el nivel es 0.925.

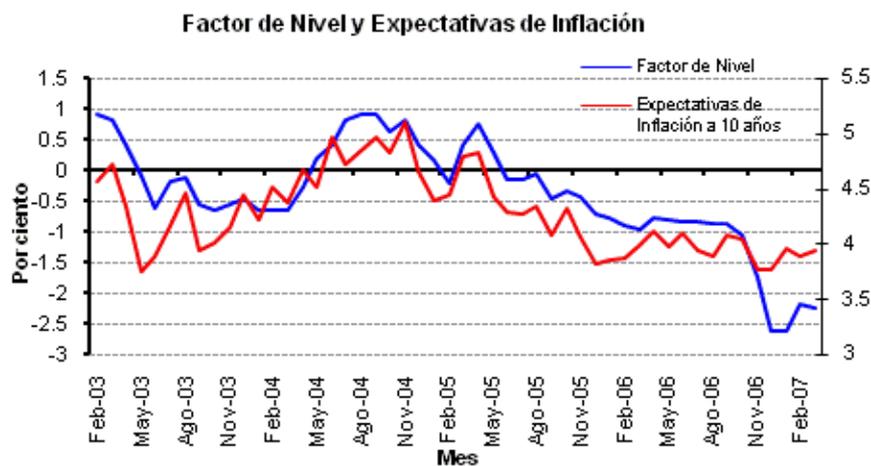
El coeficiente de la correlación entre el segundo factor y la pendiente es 0.985.

El presente trabajo ha mostrado que el primer factor latente captura los movimientos en el nivel de las tasas de interés nominales, mientras que el segundo factor latente captura los movimientos en la pendiente de la curva de rendimientos nominales. Rudebusch y Wu (2004) relacionan los movimientos en el factor de nivel con cambios en las expectativas de la inflación de largo plazo. De igual manera, los movimientos en el factor de pendiente se asocian con el ciclo económico, en particular, los cambios en el factor de pendiente dependen de los cambios en la parte corta de la curva de rendimientos generados por el banco central durante tiempos de expansión y recesión. Para analizar si dichas relaciones también existen en el caso de la curva de rendimientos de México, la Figura 5 presenta el factor de nivel y una medida de la compensación de inflación de largo plazo o de las expectativas de inflación de largo plazo, que se mide como la diferencia entre la deuda nominal de 10 años y la deuda indexada.<sup>4</sup> La Figura 5 muestra que el factor de nivel estimado parece estar estrechamente vinculado

<sup>4</sup> Este indicador también incluye una prima de riesgo inflacionario.

con las expectativas de inflación de largo plazo, dado que el coeficiente de correlación entre dichas series de tiempo es 81 por ciento.

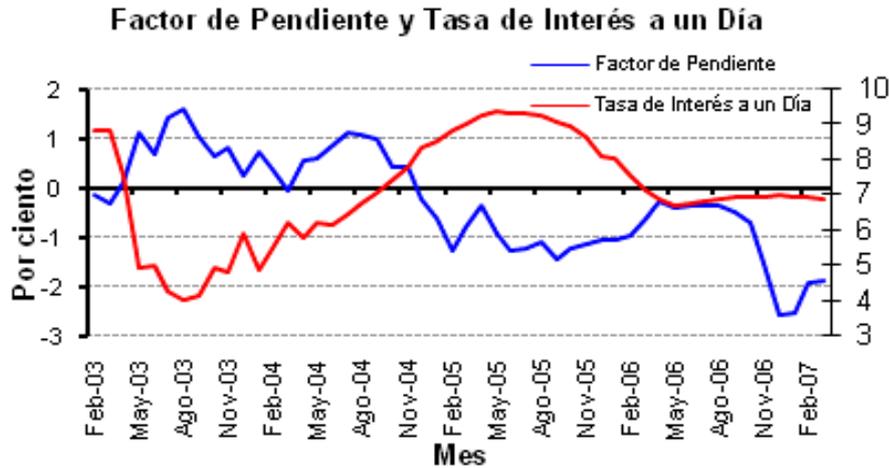
Figura 5.



El coeficiente de correlación es 0.81.

Por lo tanto, dicha figura sugiere que los movimientos en el nivel de las tasas de interés nominales están asociados con los movimientos en las expectativas de inflación de largo plazo. Este resultado coincide con otros estudios en la literatura, por ejemplo, Barr y Campbell (1997) concluyen que casi 80 por ciento del movimiento en las tasas nominales de largo plazo al parecer se explican por los cambios en la inflación esperada en largo plazo. La Figura 6 presenta el factor de pendiente y la tasa de interés a un día. El coeficiente de la correlación entre las series es -65 por ciento. Esta evidencia empírica coincide con Rudebusch y Wu (2004) que encuentran una correlación negativa entre la tasa de política y el factor de pendiente en EE.UU.

Figura 6.



El coeficiente de correlación es  $-0.65$ .

## 5. Conclusiones

En este documento se ha desarrollado y estimado un modelo afín que caracteriza la dinámica de la estructura temporal de las tasas de interés en México. Asimismo, se ha presentado evidencia empírica sobre la relación entre los factores de la estructura temporal y las variables macroeconómicas. Se demuestra que el modelo afín con dos factores se ajusta muy bien a los datos. Además, los resultados del presente trabajo, basados en los rendimientos de bonos cupón-cero de México, demuestran que el primer factor latente captura movimientos en el nivel de las tasas de interés, mientras que el segundo factor latente captura movimientos en la pendiente. Un choque positivo al primer factor latente aumenta los rendimientos de todos los vencimientos por una magnitud similar y la curva de rendimientos se desplaza paralelamente. Por lo tanto, dicho factor se denomina el factor de nivel. Un choque positivo al segundo factor latente causa un mayor aumento en los rendimientos de corto plazo en comparación con los rendimientos de largo plazo, así que la curva de rendimientos se aplana. Dicho factor se denomina el factor de pendiente. Los resultados de descomposición de la varianza muestran que el factor de nivel explica gran parte de la varianza en la parte larga de la curva en todos los horizontes, y en la parte corta y media en los horizontes de mediano y largo plazo. En horizontes de corto plazo, el factor de pendiente explica gran parte de la

varianza en la parte corta de la curva. Se muestra que los movimientos en el nivel de las tasas de interés nominales están asociados a movimientos en las expectativas de inflación de largo plazo, mientras que los movimientos en la pendiente de la curva de rendimientos están asociados a movimientos en la tasa de interés de corto plazo.

## 6. Referencias

1. Ang, A. y M. Piazzesi, (2003), *A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables*, Journal of Monetary Economics, 50, 745-787.
2. Ang, A., M. Piazzesi y M. Wei, (2003), *What does the Yield Curve tell us about GDP Growth?*, Próximo a publicarse en Journal of Econometrics.
3. Bekaert, G., S. Cho y A. Moreno, (2003), *New-Keynesian Macroeconomics and the Term Structure*, mimeo, Columbia University.
4. Campbell, J. y R. Shiller, (1991), *Yield spreads and interest rate movements: A bird's eye view*, Review of Economic Studies 58, 495-514.
5. Chen y Scott, (1993), *Pricing Interest Rate Futures Options with Futures-Style Margining*, Journal of Futures Markets, Vol 13, No 1, 15-22.
6. Cortés, J., M. Ramos-Francia y A. Torres, (2008), *An Empirical Analysis of the Mexican Term Structure of Interest Rates*, Banco de México, Documento de Investigación 2008-07.
7. Dai, Q. y K. Singleton, (2000), *Specification Analysis of Affine Term Structure Models*, Journal of Finance, Vol. LV, No. 5.
8. Hordahl, P., O. Tristani y D. Vestin, (2006), *A joint econometric model of macroeconomic and term structure dynamics*, Journal of Econometrics, Vol 131, Issues 1-2, Marzo-Abril 2006, 405-444.
9. Piazzesi, M., (2003), *Affine Term Structure Models*, Handbook of Financial Econometrics.
10. Rudebusch, G. y T. Wu, (2004), *A Macro-Finance Model of the Term Structure, Monetary Policy, and the Economy*, Federal Reserve Bank of San Francisco, Documento de Investigación 2003-17.